

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM  
ELEKTROTECHNIKI

TOM III · ZESZYT 4

KWARTALNIK

PAŃSTOWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE  
WARSZAWA 1954

## SPIS TREŚCI

B. Konorski: Badanie dwóch przypadków płaskich pól elektrostatycznych	str. 449
S. Węgrzyn: Stany nieustalone w układach pobudzanych periodycznie	481
J. Groszkowski: Rozszerzenie zasady równowagi mocy urojonej harmonicznych na układy o widmach ciągłych	499
F. Nowacki: Obliczanie składowych prądu nieustalonego generatora synchronicznego jawnobiegunowego przy naglej zmianie oporności obciążenia przedzwarciowego	509

## СОДЕРЖАНИЕ

Б. Конорски: Исследование двух случаев плоских электростатических полей	449
С. Венгрин: Нестационарные режимы в периодически возбуждаемых системах	481
Я. Грошковски: Распространение принципа баланса реактивной мощности гармоник на системы со сплошными спектрами	499
П. Новацки: Подсчёт составляющих нестационарного тока синхронного явнополюсного генератора при внезапном изменении сопротивления нагрузки, с учётом нагрузки предшествующем короткому замыканию	509

## CONTENTS — SOMMAIRE

B. Konorski: Untersuchung zweier Spezialfälle eines ebenen elektrostatischen Feldes	449
S. Węgrzyn: Transients in periodically supplied circuits	481
J. Groszkowski: The extention of the principle of the reactive power balance of harmonics to circuits with a continuous frequency spectrum	499
P. Nowacki: The calculation of the transient current in synchronous generators at sudden load changes	509

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM  
ELEKTROTECHNIKI

TOM III · ZESZYT 4

KWARTALNIK

PAŃSTOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE  
WARSZAWA

R A D A R E D A K C Y J N A :

PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,  
PROF. IGNACY MALECKI, PROF. WITOLD NOWICKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN,  
PROF. STANISŁAW SZPOR

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y :

*Redaktor Naczelny*

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI

*Z-ca Redaktora Naczelnego*

PROF. PAWEŁ NOWACKI

*Sekretarz*

WACŁAW ZWOLAKOWSKI

ADRES REDAKCJI :

Warszawa, ul. Koszykowa 75, Politechnika,

Zakład Elektroniki PAN, tel. 8.32.04

Państwowe Wydawnictwo Naukowe - Dział Czasopism  
Warszawa, Krakowskie Przedmieście 79

Nakład 782 + 103 egz.	Do składania 19 VII 1954
Ark. wyd. 8,1 druk. 6,25	Podpisano do druku 8 XII 1954
Papier dr. sat. 70 g V kl. 70×100/16	Druk ukończono w grudniu
Zamówienie 557/56	Cena zł 15.— K-5-54167
POZNAŃSKA DRUKARNIA NAUKOWA — POZNAŃ, FREDRY 10	

621.319.4.011.4

B. KONORSKI

## Badanie dwóch przypadków płaskich pól elektrostatycznych

Rękopis dostarczono 4. 2. 1954

**S t r e s z c z e n i e.** W pracy przeprowadzono analizę zniekształcenia pola elektrycznego naładowanego płaskiego kondensatora, jeżeli do jego przestrzeni wewnętrznej wprowadzić uziemiony metalowy walec lub równoległościan przy zachowaniu symetrii względem płaszczyzny równoległej do obu okładek kondensatora. W przypadku walca zastosowana jest metoda wielokrotnego odbicia zwierciadlanego, która jednak daje w praktyce dostatecznie ścisłe rezultaty tylko wówczas, gdy stosunek średnicy walca do odległości między okładkami nie przekracza 0,8. W przypadku równoległościanu zastosowana jest metoda odwzorowania konforemnego, uzupełniona metodą zwierciadlanego odbicia względem drugiej płaszczyzny symetrii równoległościanu.

Wyprowadzone wzory pozwalają obliczyć oporność paska z wyciętym symetrycznym otworem o kształcie koła lub prostokąta; obliczona jest również oporność paska z szeregiem wzdłużnie rozmieszczonych otworów. Za pomocą tych samych wzorów można obliczyć zmniejszenie strumienia magnetycznego, przenikającego przez pasek w kierunku wzdłużnym, jak również zwiększenie pojemności kondensatora.

### 1. POLE ELEKTRYCZNE PŁASKIEGO KONDENSATORA PO UMIESZCZENIU W JEGO PRZESTRZENI WEWNĘTRZNEJ PRZEWODZĄCEGO WALCA KOŁOWEGO O OSI RÓWNOLEGŁEJ DO OKŁADEK KONDENSATORA I RÓWNOODLEGŁEJ OD TYCH OKŁADEK

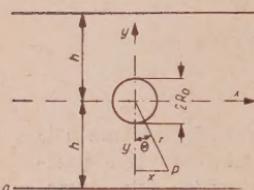
#### 1.1. Walec o małej średnicy

Jak wiadomo, przewodzący walec kołowy umieszczony w polu równomiernym polaryzuje się; działanie jego w przestrzeni zewnętrznej jest takie same jak działanie dipola liniowego.

Powierzchnie ekwipotencjalne w tym układzie teoretycznie dopiero w nieskończonym wielkiej odległości od dipola są płaszczyznami prostokątnymi do linii sił; im odległość ta jest mniejsza, tym więcej powierzchnie te różnią się od płaszczyzn.

Przede wszystkim ustalimy, dla jakiego stosunku  $\frac{R_0}{h}$  możemy zastąpić powyższe powierzchnie przez płaszczyzny, popełniając przy tym błąd zawarty w określonych granicach (rys. 1).

Oznaczając natężenie równomiernego pola przez  $K_0$  mamy



Rys. 1. Walec położony symetrycznie wewnętrznie w płaskim kondensatorze.

$$V_p = K_0 \cos \theta \left( -r + \frac{R_0^2}{r} \right) = K_0 \left( y - \frac{y R_0^2}{x^2 + y^2} \right);$$

$$\frac{\partial V_p}{\partial y} = K_0 + K_0 R_0^2 \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} \quad (1)$$

i na prostej  $a - a'$

$$K_h = K_0 \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{h}{R_0}\right)^2 - \left(\frac{x}{R_0}\right)^2}{\left[\left(\frac{h}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{R_0}\right)^2\right]^2} \right\}. \quad (2)$$

Zakładając, że wyrażenie w nawiasie równa się małej liczbie  $\beta$ , otrzymujemy

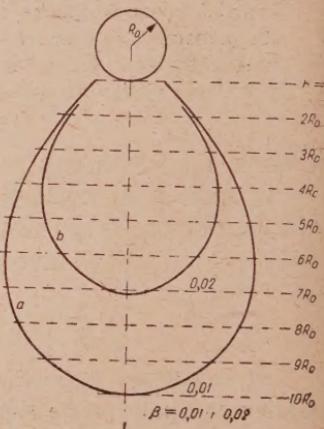
$$\frac{x^2}{R_0^2} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{8 \frac{h^2}{R_0^2} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}} - 2 \frac{h^2}{R_0^2} - \frac{1}{\beta} \right). \quad (3)$$

Wynikają stąd krzywe przedstawione na rys. 2: krzywa  $a$  odpowiadająca założeniu  $\beta = 0,01$  oraz krzywa  $b$  przy  $\beta = 0,02$ .

Zakładając we wzorze (3)  $x = 0$  znajdujemy

$$\frac{R_0}{h} = \varrho = \sqrt{\beta}, \quad (4)$$

to znaczy przy  $\beta = 0,01$  jest  $\varrho = 0,1$ .

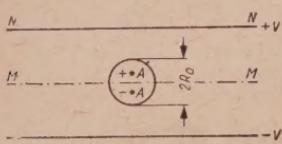


Należy tu specjalnie zaznaczyć, że krzywe przedstawione na rys. 2 nie mają charakteru krzywych odgraniczających obszar małej dokładności (na przykład obszar wewnętrz krzywych  $a$ ,  $b$ ) od obszaru dużej dokładności. Dają one tylko odpowiedź na pytanie, na jakiej odległości  $h$  można (popełniając błąd o określonej wartości) uważać rozkład ładunków na okładce kondensatora za równomierny lub też na jakiej części okładki (przy danym  $h$ ) wartość powierzchniowej gęstości ładunku odbiega od stałej wartości tej gęstości istniejącej w analogicznym kondensatorze o polu nieodkształconym.

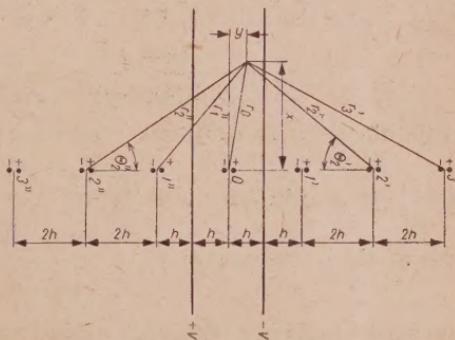
### 1.2. Walec o promieniu $R_0 \leq 0,4 h^1$

Przez chwilę będziemy abstrahować od przemieszczeń ładunków na powierzchni okładek kondensatora, które są spowodowane przez umieszczenie w wewnętrznej przestrzeni kondensatora metalowego walca.

Przy takim założeniu mamy przypadek walca przewodzącego, umieszczonego w polu równomiernym. Walec taki (rys. 3) zachowuje się jak liniowy dipol „0“ ( $+A$ ;  $-A$ ).



Rys. 3. Zastąpienie walca przez dipol liniowy.



Rys. 4. Wielokrotne odbicie dipola liniowego.

Wpływ wymienionego dipola daje się odczuwać na obu okładkach kondensatora, które przestają być powierzchniami ekwipotencjalnymi. W celu zrównoważenia wpływu dipola na powierzchnię górnej okładki wprowadzamy dipol dodatkowy  $1'$  uzyskany przez zwierciadlane odbicie dipola  $0$  względem górnej powierzchni (rys. 4). W podobny sposób wprowadzamy dipol dodatkowy  $1''$ . Dipole  $1'$  i  $0$  są położone niesymetrycznie

<sup>1</sup> Rzeczą wiadomą jest, że rozwiązywanie powyższego zagadnienia można uzyskać przez odwzorowanie konforemne pasa  $MMNN$  z usuniętym półkolem na płaszczyznę. Odwzorowanie takie prowadzi do równania różniczkowego III rzędu, zawierającego dwie specjalnie dobierane stałe. Rozwiązywanie tego równania jest bardzo trudne i wartość praktyczna metody jest mała. Przybliżone rozwiązanie podaje Lamb w swojej „Hydrodynamicie“ (tłumacz. rosyjskie z 1947 r.), jednak wzór podany przezeń jest również dość zawiły. Stan powyższy uzasadnia celowość podania w niniejszym artykule elementarnego i prostego sposobu rozwiązania opartego o metody stosowane w elektrotechnice.

względem powierzchni dolnej, dipole 1" i 0 są położone niesymetrycznie względem powierzchni górnej; wprowadzamy zatem dalsze zwierciadlane odbicia: dipola 1' względem dolnej powierzchni (dipol 2") oraz dipola 1' względem górnej powierzchni (dipol 2'). Postępując tak dalej, otrzymujemy nieskończony szereg dipoli w odstępach  $2h$  (rys. 4). Możemy obecnie spodziewać się, że w polu otrzymanym przez superpozycję wzmiarkowanego pola równomiernego oraz pola nieskończonego łańcucha dipoli spełnione zostaną warunki brzegowe zagadnienia.

Zakładając, że momenty wszystkich dipoli równe są  $2\pi ek$ , znajdujemy potencjał  $V_p$  w dowolnym punkcie  $P(x, y)$  przestrzeni wewnętrznej kondensatora

$$\begin{aligned} V_p = & -\frac{V}{h} y + k \left( \frac{\cos \Theta_0}{r_0} - \frac{\cos \Theta'_1}{r'_1} + \frac{\cos \Theta''_1}{r''_1} + \frac{\cos \Theta''_2}{r''_2} - \frac{\cos \Theta'_2}{r'_2} + \frac{\cos \Theta'_3}{r'_3} \dots \right) = \\ = & -\frac{V}{h} y + k \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{2h - y}{x^2 + (2h - y)^2} + \frac{2h + y}{x^2 + (2h + y)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{4h + y}{x^2 + (4h + y)^2} - \frac{4h - y}{x^2 + (4h - y)^2} \dots \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Istotnie, dla  $y = h$  znajdujemy z szeregu:

$$V_p = -V;$$

dla  $y = -h$  znajdujemy z szeregu:

$$V_p = +V;$$

poza tym dla  $y = 0$  mamy:

$$V_p = 0.$$

Wielkość  $k$  możemy znaleźć zakładając, że potencjał punktów  $x = 0$ ,  $y = \pm R$  równa się zeru. Wobec tego

$$0 = -V \frac{R}{h} + k \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{2h - R} + \frac{1}{2h + R} + \frac{1}{4h + R} - \frac{1}{4h - R} \dots \right),$$

stąd zaś

$$k = \frac{V}{h \left( \frac{1}{R^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R^2 - 4n^2 h^2} \right)}.$$

Nieskończoną sumę w mianowniku możemy łatwo zsumować w skończony sposób:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R^2 - 4n^2 h^2} = \frac{1}{2hR} \left( \pi \operatorname{ctg} \frac{\pi R}{2h} - \frac{2h}{R} \right);$$

otrzymujemy zatem

$$k = \frac{2VR}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi R}{2h}. \quad (6)$$

Szereg (5) możemy przedstawić w postaci

$$V_p = -\frac{V}{h} y + k \left\{ \frac{y}{x^2 + y^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2nh - y}{x^2 + (2nh - y)^2} - \frac{2nh + y}{x^2 + (2nh + y)^2} \right] \right\}, \quad (7)$$

gdzie  $k$  ma wartość (6).

Szereg (7) można również zsumować w skończonej postaci. Zakładając

$$\frac{x + jy}{2jh} = z_1; \quad \frac{x - jy}{2jh} = z_2$$

możemy napisać

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \left[ \frac{2nh - y}{x^2 + (2nh - y)^2} - \frac{2nh + y}{x^2 + (2nh + y)^2} \right] &= \frac{1}{4h} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{z_2 - n} - \frac{1}{z_1 - n} \right) = \\ &= \frac{1}{4h} \left[ \left( \pi \operatorname{ctg} \pi z_2 - \frac{1}{z_2} \right) - \left( \pi \operatorname{ctg} \pi z_1 - \frac{1}{z_1} \right) \right] = \\ &= \frac{\pi}{4h} \cdot \frac{2 \sin \pi (z_1 - z_2)}{\cos \pi (z_1 - z_2) - \cos \pi (z_1 + z_2)} + \frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu znajdujemy

$$V_p = \frac{V}{h} \left( R_0 \operatorname{tg} \frac{\pi R_0}{2h} \frac{\sin \frac{\pi y}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi y}{h}} - y \right). \quad (8)$$

Sprawdzenie tego wzoru:

dla  $y = \pm h$  otrzymujemy  $V_p = \mp V$ ,

dla  $y = R_0 \cos \theta$  powinniśmy otrzymać  $V_p = 0$ .  
i dla  $x = R_0 \sin \theta$

Wzór daje dobre rezultaty przy  $R_0 \ll 0,4h$ ; wtedy dla punktów na okręgu walca otrzymujemy odchylenia  $\frac{V_p}{2V} \ll 0,6\%$ , przeważnie jednak odchylenia jeszcze mniejsze (dla punktów bliższych  $x=0$  lub  $y=R_0$  oraz dla nieco mniejszych  $R$ ). Brak absolutnej dokładności jest wynikiem przybliżonych założeń.

### 1.3. Walec o promieniu $R_0 \ll 0,8h$

Założenia poczynione w rozdziale 1.2. można poprawić. Nie jest uzasadnione założenie, że — szczególnie przy nieco większych wartościach  $R_0$  (dla  $0,4h < R_0 \ll 0,8h$ ) — odległość obu ładunków dipola jest długością małą w stosunku do współrzędnych  $x, y$ . Przypuśćmy teraz, że ramię di-

pola posiada długość  $2c$ . Postarajmy się spełnić warunki brzegowe zagadnienia przez wielokrotne zwierciadlane odbicie (rys. 5). Na pierwszy rzut oka widać, że wskutek symetrii obie okładziny kondensatora są powierzchniami ekwipotencjalnymi.

Potencjał otrzymany w dowolnym punkcie możemy traktować jako superpozycję potencjału siatki liniowej ładunków ujemnych i potencjału siatki liniowej ładunków dodatnich; odległość dowolnych dwóch ładunków liniowych każdej siatki wynosi  $2h$ .

Wiadomo z teorii, że potencjał zespolony  $w$  takiej siatki jest

$$w = u + jv = jc_1 \ln \left[ 2 \sin \frac{\pi}{2h} j(x + jy) \right], \quad (9)$$

przy czym założono, że jeden z ładunków liniowych położony jest w płaszczyźnie  $y=0$ . Korzystając ze znanych przekształceń funkcji hiperbolicznych znajdujemy

$$w = u + jv = jc_1 \ln 2 \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{2h} x - \cos^2 \frac{\pi}{2h} y - c_1 \theta}, \quad (10)$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \theta = - \frac{\operatorname{th} \frac{\pi}{2h} x}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2h} y}.$$

Dla ładunków dodatnich wynika stąd

$$v_1 = \frac{c_1}{2} \ln 4 \left[ \operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{2h} - \cos^2 \frac{\pi(y-c)}{2h} \right],$$

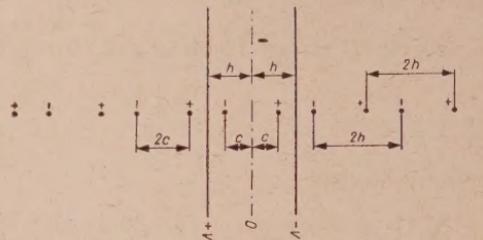
dla ładunków ujemnych

$$v_2 = - \frac{c_1}{2} \ln 4 \left[ \operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{2h} - \cos^2 \frac{\pi(y+c)}{2h} \right],$$

stąd zaś przez superpozycję

$$V_p' = \frac{c_1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi(y-c)}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi(y+c)}{h}}.$$

Równanie powyższe daje rzeczywiście  $V_p' = 0$  dla  $y=0$  lub dla  $y=\pm h$ .



Rys. 5. Wielokrotne odbicie dipola liniowego o skończonej odległości  $c$  między ładunkami.

Potencjał w dowolnym punkcie  $P$  wewnątrz kondensatora wynosi zatem

$$V_p = -\frac{V}{h}y + \frac{c_1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi(y-c)}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi(y+c)}{h}}$$

Wartość  $c_1$  otrzymujemy przez podstawienie  $x=0$ ;  $y=R_0$ ;  $V_p=0$

$$c_1 = \frac{2VR_0}{h \ln \frac{1 - \cos \frac{\pi(R_0 - c)}{h}}{1 - \cos \frac{\pi(R_0 + c)}{h}}}$$

Ostatecznie znajdujemy

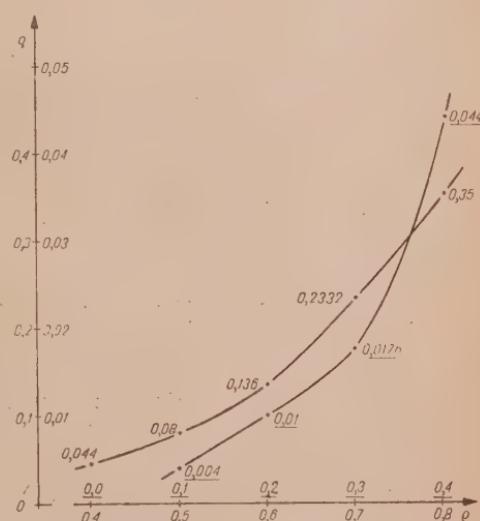
$$V_p = \frac{V}{h} \left( -y + \frac{R_0}{\ln \frac{1 - \cos \frac{\pi(R_0 - c)}{h}}{1 - \cos \frac{\pi(R_0 + c)}{h}}} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi(y-c)}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi(y+c)}{h}} \right) \quad (11)$$

Wielkość  $c/h$  najlepiej można otrzymać z założenia, że

dla  $x=y=R_0 \cos 45^\circ$  jest  $V_p=0$ .

Ze względu na skomplikowaną budowę równania wartość  $q=c/h$  otrzymujemy drogą kolejnych prób jako funkcję wielkości  $\varrho=R_0/h$  (rys. 6). Dokładność wzoru zawarta jest w granicach podanych wyżej przy  $R_0 \leq 0,8h$ . Natomiast przy  $R_0 > 0,8h$  dokładność wzoru maleje znacznie. Z tego wynika, że dla powyższych warunków nie można ograniczyć się do poczynionych założeń.

Można łatwo wykazać, że zakładając we wzorze (11)  $c \rightarrow 0$



Rys. 6. Graficzne przedstawienie zależności między  $q = \frac{c}{h}$  i  $\varrho = \frac{R_0}{h}$ .

dochodzi się z powrotem do wyrażenia (8). Rozwinięte przez nas wzory obejmują zatem zakresy następujące:

Wzór	(4)	(8)	(11)
Zakres	$\varrho \leq 0,1$	$\varrho \leq 0,4$	$\varrho \leq 0,8$

Gęstość  $\sigma$  ładunków na górnej okładce kondensatora jest następująca:

$$\sigma = \varepsilon_0 \left( \frac{\partial V_p}{\partial y} \right)_{y=h} = \frac{\varepsilon_0 V}{h} \left( -1 + \frac{2\pi k}{h} \frac{\sin \frac{\pi c}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi c}{h}} \right).$$

Wyrażenie powyższe można napisać w postaci

$$\left( \frac{\partial V_p}{\partial y} \right)_{y=h} = -\frac{V}{h} + \frac{V}{h} \frac{2\pi k}{h} \underbrace{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi c}{2h} + j \frac{\pi x}{2h} \right)}_{\text{2}}$$

Zakładając, że równa się ono  $\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=h}$ , znajdujemy funkcję  $U$  strumienia dla  $y=h$  i dla drogi  $0 \rightarrow x$

$$\begin{aligned} (U)_{y=h} &= \int_0^x \left[ -\frac{V}{h} + \frac{2\pi kV}{h^2} \underbrace{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi c}{2h} + j \frac{\pi x}{2h} \right)}_{\text{2}} \right] dx = \\ &= -\frac{V}{h} \left\{ x + \frac{4R_0 \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2h} \operatorname{th} \frac{\pi x}{2h} \right]}{1 - \cos \frac{\pi(R_0 + c)}{h}} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Otrzymujemy

$$\left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=h} = \left( \frac{\partial V_p}{\partial x} \right)_{y=h} (=0),$$

tak że warunki Cauchy Riemanna są spełnione i znaleziona funkcja

$$(U)_{y=h} + j(V)_{y=h}$$

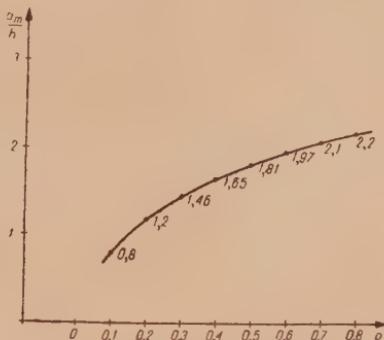
jest potencjałem zespolonym dla brzegowego obszaru pola kondensatora.

<sup>2</sup> Wyrażenie  $A$  oznacza część rzeczywistą wielkości  $A$ .

Wyrażenie  $A$  oznacza część urojoną wielkości  $A$ .

## 1.4. Natężenie pola w punktach na osi symetrii walca C

Na jakiej odległości  $a_m$  od środka walca natężenie pola różni się o  $1\%$  od natężenia pola równomiernego?



Rys. 7. Graficzne przedstawienie za-  
leżności między  $\frac{a_m}{h}$  i  $\frac{R_0}{h}$ .

Odległość tę obliczymy dla  $y=h$  i dla  $y=0$

$$\left( \frac{\partial V_p}{\partial y} \right)_{y=h} = \frac{V}{h} \left( -1 + \frac{2\pi k}{h} \frac{\sin \frac{\pi c}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi c}{h}} \right),$$

$$\left( \frac{\partial V_p}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{V}{h} \left( -1 - \frac{2\pi k}{h} \frac{\sin \frac{\pi c}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi c}{h}} \right).$$

Otrzymujemy stąd

$$\frac{2\pi k}{h} \frac{\sin \frac{\pi c}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi a_m}{h} \pm \cos \frac{\pi c}{h}} = 0,01.$$

Ze wzoru

$$\operatorname{ch} \frac{\pi a_m}{h} \pm \cos \frac{\pi c}{h} = \frac{200 \pi}{2,3 h} \frac{\frac{R_0 \sin \pi q}{\sin \frac{\pi}{2} (\varrho - q)}}{2 \lg \frac{\sin \frac{\pi}{2} (\varrho + q)}{\sin \frac{\pi}{2} (\varrho + q)}}$$

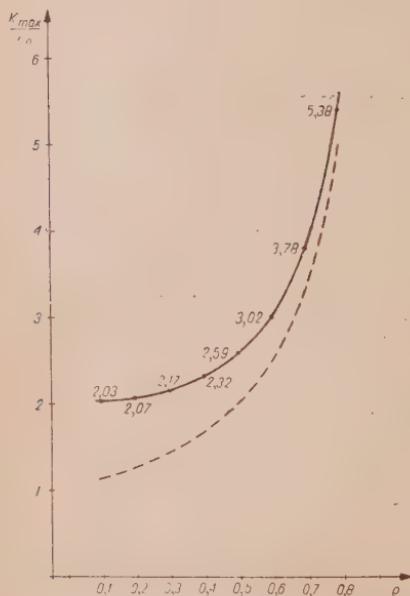
możemy obliczyć  $\frac{a_m}{h}$  dla rozmaitych wartości  $q$  (rys. 7).

## 1.5. Największe natężenie pola

Następnym zagadnieniem jest znalezienie wartości  $K_{\max}$  występującej w rozważanym polu.

$K_{\max}$  otrzymuje się dla  $y = R_0$ ;  $x = 0$ . Podstawiając te wartości do wyrażenia dla  $\frac{\partial V_p}{\partial y}$  znajdujemy

$$\left( \frac{\partial V_p}{\partial y} \right)_{\max} = \frac{V}{h} \left\{ 1 + \frac{\pi \varrho_0}{2 \ln \frac{\pi \varrho_0}{2} (\varrho + q)} \sin \frac{\pi}{2} (\varrho - q) \sin \frac{\pi}{2} (\varrho - q) \sin \frac{\pi}{2} (\varrho + q) \right\} \quad (13)$$



Rys. 8. Graficzne przedstawienie natężenia pola elektrostatycznego w punkcie walca najbliższej położonym okładki kondensatora (linia ciągła — pole rzeczywiste odksztalcone; linia przerywana — hipotetyczne pole równomierne).

Wartości krzywej  $K_{\max}$  są wyższe niż rzędne hiperboli (krzywa kreskowana na rys. 8):

$$\frac{V}{h \cdot R_0} = \frac{K_0}{1 - \varrho}$$

Jeżeli  $\varrho \leq 0,4$ , to zakładając  $q \rightarrow 0$  otrzymuje się wyrażenie prostsze

$$K_{\max} = \left( \frac{\partial V_p}{\partial y} \right)_{\max} = -\frac{V}{h} \left( 1 + \frac{\pi \varrho}{\sin \pi \varrho} \right). \quad (14)$$

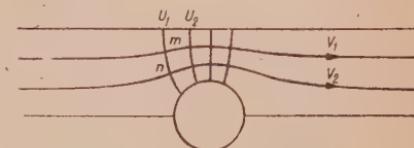
Zależność  $K_{\max}$  od  $\varrho$  przedstawia rys. 8; dla  $h = \infty$  zgodnie z teorią znajdujemy  $K_{\max} = 2K_0$ . Z rysunku tego widać, jak wzrasta bezpieczeństwo pioruna na wierzchołku wzgórza o postaci (połówki) walca przy nisko opuszczających się chmurach.

## 1.6. Zastosowanie do pola przepływowego

Założymy, że obliczony wyżej potencjał zespolony przedstawia przepływ prądu. Grubość blachy jest  $\delta$ , cały prąd płynący przez pasek jest  $i$ , przewodność właściwa —  $\gamma$ . Wtedy we wzorach zamiast  $2V$  musimy pisać  $i/\delta\gamma$

Weźmy siatkę linii  $U, V$  (rys. 9) ze stałymi odstępami  $\Delta V = V_1 - V_2$  i  $\Delta U = U_1 - U_2$ . Oporność jednej komórki jest  $R'$

$$R' = \frac{m}{n\delta\gamma}$$



Rys. 9. Schematyczne przedstawienie kilku linii sił i powierzchni ekwipotencjalnych w polu elektrostatycznym układu z rys. 1.

Z prawa Ohma wynika, że  $\frac{m}{n} = \text{const} = -C$  i stąd  $R' = \frac{C}{\delta\gamma} = \text{const}$ . A zatem przyrost oporu jest taki sam dla dowolnej nitki jak i dla nitki położonej przy  $y=h$ . Dla ostatniej mamy

$$\left( \frac{\partial V_p}{\partial y} \right)_{y=h} - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{y=h} = -\frac{V}{h} + \frac{V}{h} \frac{2\pi k}{h} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi c}{2h} + j \frac{\pi x}{2h} \right)$$

i stąd obliczamy funkcję potencjalną  $U$  dla  $y=h$  i dla drogi  $0 \rightarrow x$  zgodnie ze wzorem (12).

Przyrost drogi od  $-x$  do  $+x$  wynosi

$$\Delta x = 4R_0 \frac{\operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2h} \operatorname{th} \frac{\pi x}{2h} \right]}{\sin \frac{\pi (R_0 + c)}{2h}} \ln \frac{\frac{2h}{\sin \frac{\pi (R_0 + c)}{2h}}}{\frac{2h}{\sin \frac{\pi (R_0 - c)}{2h}}}$$

Napięcie między punktami  $-x$  i  $+x$  jest

$$\frac{i(2x + \Delta x)}{2\delta\gamma h},$$

oporność zaś

$$\frac{1}{2\delta\gamma h} (2x + \Delta x).$$

Arytmetyczny przyrost oporu równomiernego, równego  $\frac{x}{\delta\gamma h}$ , oznaczamy przez  $(\Delta R)_{\pm x}$

$$(\Delta R)_{\pm x} = \frac{2R_0}{\delta\gamma h} \frac{\operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2h} \operatorname{th} \frac{\pi x}{2h} \right]}{\ln \frac{\sin \frac{\pi(R_0+c)}{2h}}{\sin \frac{\pi(R_0-c)}{2h}}} \quad (15)$$

Przyrost oporu dla drogi od  $-\infty$  do  $+\infty$  jest

$$(\Delta R)_{\pm\infty} = \frac{\pi c R_0}{\delta\gamma h^2} \frac{1}{\ln \frac{\sin \frac{\pi(\varrho+q)}{2}}{\sin \frac{\pi(\varrho-q)}{2}}} \quad (16)$$

W przypadkach gdy  $\varrho \leq 0,4$  wzory powyższe można uprościć

$$(\Delta R)_{\pm x} = \frac{R_0}{\delta\gamma h} \operatorname{tg} \frac{\pi R_0}{2h} \operatorname{th} \frac{\pi x}{2h}; \quad (\Delta R)_{\pm\infty} = -\frac{R_0}{\delta\gamma h} \operatorname{tg} \frac{\pi R_0}{2h} \quad (17)$$

### Przykład licbowy

Oporność paska miedzianego ( $\gamma = 56000 \Omega^{-1} \text{mm}^{-1}$ )  $\delta = 0,1 \text{ mm}$ ;  $l = 105 \text{ mm}$ ;  $h = 25 \text{ mm}$ ;  $R_0 = 12,5 \text{ mm}$ ;  $\varrho = 0,5$ . Zgodnie z rys. 6:  $q = 0,08$ ;  $c = 2 \text{ mm}$ ; zgodnie z rys. 7:  $a_m = 1,81h = 45,25 \text{ mm}$ . Wzór (15):

$$\Delta R_{52,5} = \frac{2 \cdot 12,5}{0,1 \cdot 56000 \cdot 25} \frac{\operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi 2}{50} \operatorname{th} \frac{\pi 52,5}{50} \right]}{\ln \frac{\sin \frac{\pi(12,5+2)}{2}}{\sin \frac{\pi(12,5-2)}{2}}} = 8,8 \cdot 10^{-5} \Omega;$$

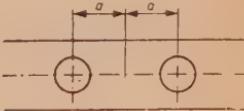
$$R = \frac{52,5}{0,1 \cdot 56000 \cdot 25} = 37,5 \cdot 10^{-5} \Omega; \quad R + \Delta R = 46,3 \cdot 10^{-5} \Omega;$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{8,8}{37,5} = 23,5\% = \text{zwiększenie oporności wskutek otworu.}$$

### 1.7. Zastosowanie do przypadku paska z dwoma otworami

Założymy, że mamy 2 otwory umieszczone na osi w odległości  $2a$  (rys. 10). Otrzymamy potencjał przez superpozycję (dopuszczalna ze względu na te same wartości brzegowe; dla  $y=0$  mamy  $V_p=0$ )

$$V_p = \frac{V}{h} \left\{ -y \left[ \frac{R_0}{1 - \cos \frac{\pi(R+c)}{h}} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(x+a)}{h} - \cos \frac{\pi(y-c)}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(x+a)}{h} - \cos \frac{\pi(y+c)}{h}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(x-a)}{h} - \cos \frac{\pi(y-c)}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(x-a)}{h} - \cos \frac{\pi(y+c)}{h}} \right] \right\}.$$



Rys. 10. Pasek z dwoma symetrycznymi otworami położonymi równolegle na osi.

Po przekształceniach znajdujemy

$$\left( \frac{\partial V_p}{\partial y} \right)_{y=h} = \frac{V}{h} \left\{ -1 - \frac{2k\pi}{h} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi c}{2h} + j\pi \frac{x+a}{2h} \right) + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi c}{2h} + j\pi \frac{x-a}{2h} \right) \right] \right\},$$

stąd zaś

$$(U)_{y=h} = -\frac{V}{h} x - \frac{4Vk}{h} \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2h} \operatorname{th} \frac{\pi(x+a)}{2h} \right] \\ - \frac{4Vk}{h} \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2h} \operatorname{th} \frac{\pi(x-a)}{2h} \right].$$

Różnica wartości tej funkcji dla wartości  $x=a$  i  $x=-a$  wynosi

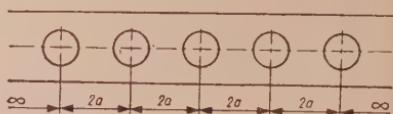
$$U_{y=h} = 2a \frac{V}{h} + \frac{8Vk}{h} \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2h} \operatorname{th} \frac{\pi a}{h} \right].$$

Na tej podstawie wnioskujemy, że wzrost oporu na drodze  $-a \rightarrow +a$  jest zgodny ze wzorem (15)

$$\Delta R_{\pm a} = \frac{2\varrho}{\delta\gamma} \frac{\operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2h} \operatorname{th} \frac{\pi a}{h} \right]}{\ln \frac{\sin \frac{\pi}{2}(\varrho+q)}{\sin \frac{\pi}{2}(\varrho-q)}}. \quad (18)$$

Przy  $n$  otworach (położonych w osi, wzajemne odległości =  $2a$ ) zwiększenie oporu od osi pierwszego otworu do osi  $n$ -tego otworu wynosi:

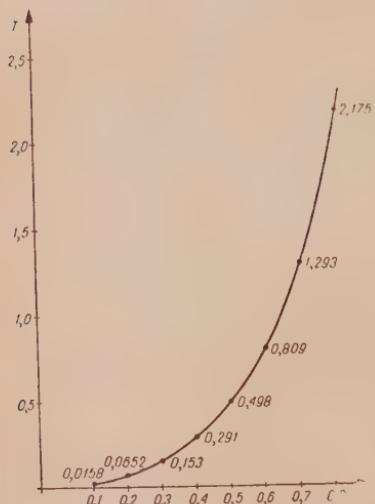
$$\frac{2(n-1)\varrho}{\delta\gamma} \ln \frac{\arctg \left[ \tg \frac{\pi}{2} q \th \frac{\pi a}{h} \right]}{\sin \frac{\pi}{2} (q+q)} \frac{\sin \frac{\pi}{2} (q+q)}{\sin \frac{\pi}{2} (q-q)}$$



Rys. 11. Pasek z szeregiem symetrycznie położonych równych otworów kołowych.

Przy  $n$  otworach (położonych jak wyżej, rys. 11) zwiększenie oporu od  $-\infty$  do  $+\infty$  wynosi:

$$\Delta R_{\pm\infty} = \frac{\varrho}{\delta\gamma \ln} \left[ 2(n-1) \arctg \left( \tg \frac{\pi}{2} q \th \frac{\pi a}{h} \right) + \pi q \right]. \quad (19)$$



Rys. 12. Graficzne przedstawienie przebiegu funkcji  $T$  wzoru (24) w zależności od  $\varrho = \frac{R_0}{h}$ .

Wzór powyższy można uprościć, jeżeli  $a > a_m$ . Otrzymamy wówczas

$$\Delta R_{\pm\infty} = \frac{n}{\delta\gamma} \frac{\pi q \varrho}{\ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} (q+q)}{\sin \frac{\pi}{2} (q-q)}} = - \frac{n}{\delta\gamma} T. \quad (20)$$

Zależność  $T = f(\varrho)$  przedstawiono na rysunku 12.

Przy  $\varrho \leq 0,4$  otrzymujemy wyrażenia prostsze

$$\Delta R_{\pm\infty} = \frac{\varrho}{\delta\gamma} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \varrho \left[ (n-1) \operatorname{th} \frac{\pi a}{h} + 1 \right] \quad (21)$$

oraz dla  $a > a_m$

$$\Delta R_{\pm\infty} = \frac{n}{\delta\gamma} \varrho \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \varrho = \frac{n}{\delta\gamma} T. \quad (22)$$

### 1.8. Zastosowanie do pola magnetycznego

Zmniejszenie strumienia magnetycznego przenikającego wzdłużnie pas jak przedstawiono na rys. 11.

Przy strumieniu zmiennym na miejscu otworów mogą znajdować się nity z masywnego metalu; wytwarzające się w nich prądy wirowe ekranują przestrzenie wewnętrzne od przeniknięcia strumienia magnetycznego. Jeżeli strumień bez istnienia otworu oznaczymy przez

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_\mu},$$

to strumień przy istnieniu otworu będzie

$$\Phi' = \frac{\Theta}{R_\mu + \Delta R_\mu} = \Phi \left( 1 - \frac{\Delta R_\mu}{R_\mu} \right),$$

a zatem względne zmniejszenie strumienia spowodowane przez otwór jest

$$\frac{\Delta \Phi}{\Phi} = \frac{\Delta R_\mu}{R_\mu} = (\Delta R) \gamma \delta \frac{2h}{l};$$

( $\Delta R$ ) oznacza wyrażenia (19) do (22),  $l$  zaś jest całkowitą długością paska według rys. 10, przy czym

$$l = 2a_m + 2(n-1)a.$$

Znajdujemy zatem z (19)

$$\frac{\Delta \Phi}{\Phi} = \frac{2R_0}{l} \frac{2(n-1) \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} q \operatorname{th} \frac{\pi a}{h} \right) + \pi q}{\ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} (\varrho + q)}{\sin \frac{\pi}{2} (\varrho - q)}} \quad (23)$$

oraz w warunkach wzorów (20) i (22):

$$\frac{\Delta \Phi}{\Phi} = \frac{2hn}{l} T$$

i wreszcie w warunkach wzoru (21)

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{2R_0}{l} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \varrho \left[ (n-1) \operatorname{th} \frac{\pi a}{h} + 1 \right]. \quad (24)$$

### 1.9. Zwiększenie pojemności kondensatora

Z wyprowadzonych zależności można obliczyć, o ile zwiększy się pojemność kondensatora (rys. 3), jeżeli wprowadzimy do jego wewnętrznzej przestrzeni walec przewodzący. Ze wzoru (12) otrzymujemy:

$$\left| \frac{(U)_{y=h}}{2V} \right| = \frac{x}{2h}$$

i wobec tego pojemność kondensatora, którego okładki są równe  $\delta$  ( $0 \div x$ ), wynosi

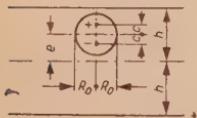
$$C = \epsilon \delta \frac{(U)_{y=h}}{2V}.$$

Wynika stąd, że zwiększenie pojemności kondensatora o okładkach  $\delta$  ( $-a$  do  $+a$ ) jest

$$\Delta C = - \frac{2R_0 \epsilon \delta}{h} \frac{\operatorname{arctg} \left| \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2h} \operatorname{th} \frac{\pi a}{2h} \right|}{\ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} (\varrho + q)}{\sin \frac{\pi}{2} (\varrho - q)}}. \quad (25)$$

### 1.10. Walec położony niesymetrycznie

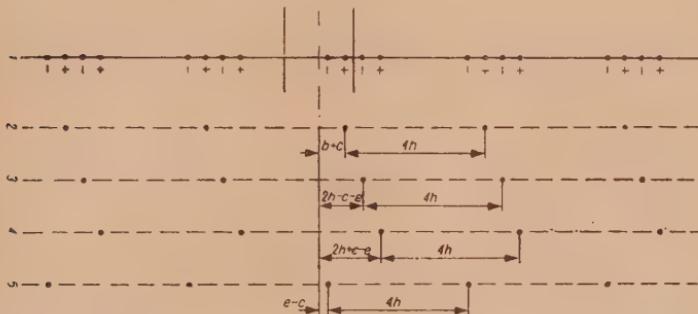
Istnieje możliwość obliczenia pola, posługując się przedstawioną wyżej metodą, również i w przypadku, gdy walec metalowy położony jest niesymetrycznie w stosunku do okładek kondensatora (rys. 13). Jednakże obliczenia w tym przypadku są dość skomplikowane.



Rys. 13. Pasek z niesymetrycznym położonym otworem kołowym.

Zakładamy, że na zewnątrz walca działanie jego sprowadza się do działania dipola o ramieniu  $2c$ . Stosując metodę wielokrotnego odbicia, jak w rozdz. 1.2, otrzymujemy szereg dipoli położonych w osi rzędnych (rys. 14/1). Układ powyższy ma symetrię w stosunku do obu okładek  $y = \pm h$ ; rozkładamy go na cztery siatki liniowe (rys. 14/2-5) i każdą z nich traktujemy jak w rozdz. 1.2. Potencjał dowolnego punktu  $P$  jest wówczas

$$V_p = -\frac{V}{h} y + \frac{c_1}{2} \ln 4 \left[ \operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{4h} - \cos^2 \frac{\pi}{4h} (y - e - c) \right] - \frac{c_1}{2} \ln 4 \left[ \operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{4h} - \cos^2 \frac{\pi}{4h} (y - 2h + c + e) \right] - \frac{c_1}{2} \ln 4 \left[ \operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{4h} - \cos^2 \frac{\pi}{4h} (y - 2h - c + e) \right] - \frac{c_1}{2} \ln 4 \left[ \operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{4h} - \cos^2 \frac{\pi}{4h} (y - e + c) \right].$$



Rys. 14. Wielokrotné odbicie dipoli w przypadku układu z rys. 13.

Wyrażenie powyższe spełnia warunki brzegowe. Zakładając

$$\frac{e}{h} = \varepsilon; \quad \frac{c}{h} = q; \quad \frac{R_0}{h} = \varrho$$

uwzględniając, że potencjał punktu  $x=0, y=R_0+c$  równa się zeru, możemy obliczyć nieznany współczynnik

$$c_1 = -\frac{V(R_0+e)}{h \ln A},$$

gdzie

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{4}(\varrho+q)}{\sin \frac{\pi}{4}(\varrho-q)} : \frac{\cos \frac{\pi}{4}(\varrho+q+2\varepsilon)}{\cos \frac{\pi}{4}(\varrho-q+2\varepsilon)}.$$

Otrzymujemy w ten sposób wyrażenie dla  $V_p$

$$V_p = -\frac{V}{h} \left\{ y + \frac{R_0+e}{2 \ln A} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h} - \cos \frac{\pi}{2} \left( \frac{y}{h} - \varepsilon - q \right)}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h} + \cos \frac{\pi}{2} \left( \frac{y}{h} + \varepsilon - q \right)} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h} + \cos \frac{\pi}{2} \left( \frac{y}{h} + \varepsilon - q \right)}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h} - \cos \frac{\pi}{2} \left( \frac{y}{h} - \varepsilon + q \right)} \right\}. \quad (26)$$

W celu obliczenia nieznanej wielkości  $q$  wykorzystujemy własność punktu  $x=0, y=e-R_0$  dla którego  $V_p=0$ . Znajdujemy stąd zależność

$$\ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} \varepsilon + \sin \frac{\pi}{2} (\varrho + q - \varepsilon)}{\sin \frac{\pi}{2} \varepsilon + \sin \frac{\pi}{2} (\varrho - q - \varepsilon)} = \frac{R_0 - e}{R_0 + e} = \frac{\varrho - \varepsilon}{\varrho + \varepsilon}$$

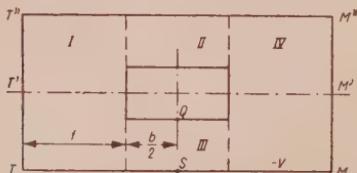
$$\ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} \varepsilon - \sin \frac{\pi}{2} (\varrho + \varepsilon + q)}{\sin \frac{\pi}{2} \varepsilon - \sin \frac{\pi}{2} (\varrho + \varepsilon - q)}$$

Wyznaczając stąd dla danych  $\varrho, \varepsilon$  odpowiednią wartość  $q$ , możemy obliczyć  $V_p$  i  $K$  dla każdego punktu rozważanego obszaru.

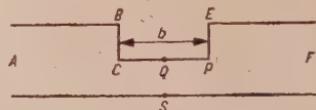
2. POLE ELEKTRYCZNE PŁASKIEGO KONDENSATORA, KTÓRE OTRZYMUJE SIĘ PO UMIESZCZENIU W JEGO PRZESTRZENI WEWNĘTRZNEJ PRZEWODZĄCEGO PROSTOPADŁOŚCIANU O DWÓCH POWIERZCHNIACH RÓWNOLEGŁYCH DO OKŁADEK KONDENSATORA I O OSI RÓWNOODLEGŁEJ OD TYCH OKŁADEK (Rys. 15)

### 2.1. Kondensator płaski z umieszczonym wewnątrz niego przewodzącym prostopadłostcianem

Rozważmy pole kondensatora, dokonując podziału przez płaszczyznę przechodzącą przez oś (plaszczyzna ta jest powierzchnią ekwipotencjalną); otrzymujemy figurę płaską (rys. 16), przedstawiającą sześciokąt o wierz-



Rys. 15. Prostopadłostcian położony symetrycznie wewnątrz kondensatora płaskiego.



Rys. 16. Rysunek do odwzorowania konforemnego paska z wyciętym prostokątem.

chołkach  $AB \dots EF$ . Odwzorowując ten wielokąt na półplaszczyznę  $w_1 \geq 0$  za pomocą metody Schwartza-Christoffella, otrzymujemy całkę

$$z = c \int_{w_0}^{w_1} \sqrt{\frac{(w_1 - a)(w_1 - b)}{(w_1 - c)(w_1 - 1)}} \cdot \frac{dw_1}{w_1},$$

której rozwiązanie stanowi trudny problem z dziedziny funkcji eliptycznych.

W celu rozwiązań powyższego zagadnienia sposobem elementarnym przedstawimy metodę przybliżoną, której zakres stosowności jest jednakże ograniczony.

Przekształcimy czworokąt  $A_1A_4A_3A_2$  (rys. 17) stosując wyżej wymienione odwzorowanie konforemne na półpłaszczyznę, następnie zaś na pas. W tym celu należy rozwiązać całkę

$$z = c \int_a^{w_1} \sqrt{\frac{w_1-a}{w_1-1}} \cdot \frac{dw_1}{w_1} + c_1$$

ustalić wartości stałych całkowania z warunków rzegowych. Otrzymujemy znane rozwiązanie

$$z = \frac{H}{\pi} \left[ \operatorname{arch} \frac{2w_1-a-1}{1-a} - \sqrt{a} \operatorname{arch} \frac{(a+1)w_1-2a}{w_1(1-a)} \right] + h j, \quad (27)$$

dzie

$$a = \left( \frac{H+h}{H} \right)^2,$$

czyż czym założono

$$w_1 = e^{\frac{\pi}{v_1-v_2}(u+jv-jV_1)}$$

Zakładamy dalej

$$V_1 = 0; \quad V_2 = -V; \quad w_1 = e^{c(u+jv)}; \quad c = \frac{\pi}{V}$$

ie zauważając tym naszego zagadnienia.

W celu sprawdzenia równania (27) stwierdzamy dla  $v=V_1$  i  $u=-\infty$

otrzymuje się  $x = -\infty$  na prostej  $A_1A_4$ ,

dla  $v=V_1$  i  $u=+\infty$

otrzymuje się  $x = +\infty$  na prostej  $A_3A_2$ ;

gruba biorąc rozkład wartości funkcji strumienia dielektrycznego jest przedstawiony na rysunku 18.

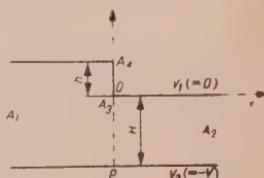
Rozwijając funkcję  $\operatorname{arch}(m \pm jn)$  możemy przedstawić równanie (27) w postaci parametrowej

$$x = \frac{H}{\pi} \left[ \operatorname{arch} \frac{B_1+B_2}{a-1} - \sqrt{a} \operatorname{arch} \frac{aB_1+B_2}{(a-1)e^{cu}} \right];$$

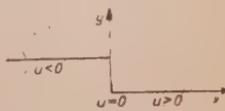
$$y = \frac{H}{\pi} \left[ \operatorname{arc cos} \frac{B_1-B_2}{a-1} - \sqrt{a} \operatorname{arc cos} \frac{aB_1-B_2}{(a-1)e^{cu}} \right], \quad (28)$$

czyż czym

$$B_1 = \sqrt{e^{2cu} - 2e^{cu} \cos cv + 1}; \quad B_2 = \sqrt{e^{2cu} - 2ae^{cu} \cos cv + a^2}.$$



Rys. 17. Rysunek do odwzorowania konforemne linii łamanej (polowy prostokąta z rys. 16).



Rys. 18. Wartość zmiennej  $u$  wzdłuż linii łamanej z rys. 17.

Z równań powyższych wynika, że linia strumienia  $u=0$  przechodzi przez początek 0 układu współrzędnych i na prostej  $y=-H$  ma odcień.

$$x = \frac{H}{\pi} \left( \operatorname{arch} \frac{a+3}{a-1} - \sqrt{a} \operatorname{arch} \frac{3a+1}{a-1} \right).$$

Jeżeli liczba  $a$  jest bliska jedności, to równanie parametrowe dla  $x$  daje się uprościć; wówczas

$$y = \frac{H}{V} v - \frac{h}{\pi} \operatorname{arc cos} \frac{e^{cu} - \cos cv}{\sqrt{e^{2cu} - 2e^{cu} \cos cv + 1}}.$$

Następnie obliczamy natężenie pola elektrycznego  $K$  na linii  $A_1A_4A_3A_2$  otrzymujemy:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{v_1} = K_{v_1} = \frac{V_1 - V_2}{H} \sqrt{\frac{e^{cu} - 1}{e^{cu} - a}},$$

stąd zaś wynika

$$\text{dla } u = \infty : \quad K_{v_1=0} = \frac{V_1 - V_2}{H} = K_0,$$

$$\text{dla } u = -\infty : \quad K_{v_1=0} = \frac{V_1 - V_2}{H + h}.$$

Zakładamy, że dla punktu  $Q$   $\left( x = \frac{b}{2}, y = 0 \right)$  rys. 16

$$K_{p_1=0} = \sqrt{\frac{e^{cu} - 1}{e^{cu} - a}} = 1 + a,$$

gdzie  $a$  jest obieralną małą liczbą. Podstawiając otrzymaną wartość  $e^{cu}$  do (27) znajdujemy

$$\lambda = \frac{b}{2h} = \frac{1}{\pi(\sqrt{a} - 1)} \left[ \operatorname{arch} \frac{(1+a)^2 + 1}{(1+a)^2 - 1} - \sqrt{a} \operatorname{arch} \frac{(1+a)^2 + \frac{1}{a}}{(1+a)^2 - \frac{1}{a}} \right], \quad (29)$$

a zakładając np.  $a = 0,01$ , otrzymujemy:

$$\lambda = \frac{2}{\pi(\sqrt{a} - 1)} \left[ \operatorname{arch} 100,5 - \sqrt{a} \operatorname{arch} \frac{1,02a + 1}{1,02a - 1} \right].$$

Przy tych samych założeniach otrzymuje się natężenie pola w punkcie  $S$   $\left( x = \frac{b}{2}; y = -H \right)$  — rys. 16

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{v_2} = K_{v_2} = K_0 \sqrt{\frac{e^{cu} + 1}{e^{cu} + a}}.$$

Zakładając, że powyższe wyrażenie równa się  $K_0(1-\beta)$  można łatwo wykazać, że w danych warunkach ( $a > 1$ ) jest zawsze

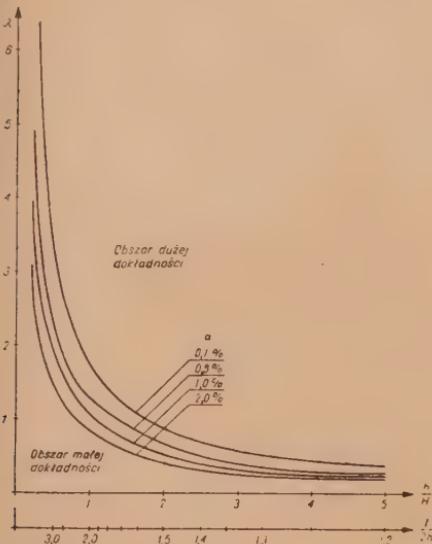
$$\beta < a,$$

tz. że przyjęte przez nas przybliżenie dla punktu  $Q$  jest w wyższym jeszcze stopniu spełnione w punkcie  $S$ .

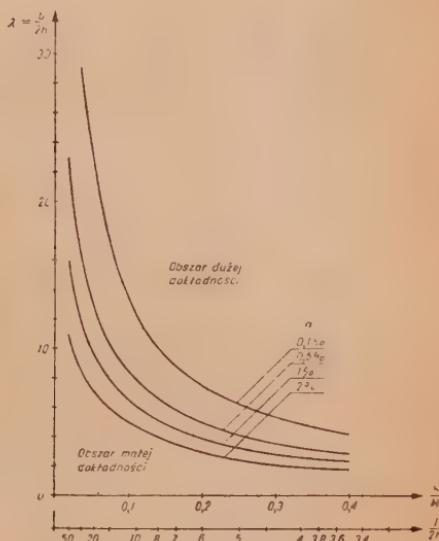
Równanie (29) dla przyjętej wartości  $a$  możemy traktować jako zależność między  $\lambda$  i  $a$ . Zależność tę przedstawiono na rys. 19 i 20 dla

$$a = \frac{1}{50}, \frac{1}{100}, \frac{1}{200} \text{ i } \frac{1}{1000},$$

przy czym na osi odciętych przyjęto zamiast  $a$  wielkość  $h/H$ .



Rys. 19. Rysunek pomocniczy służący do ustalenia współczynnika  $\lambda$  przy danym stosunku  $h/H$ , przy obranej dokładności  $a$ .



Rys. 20. Rysunek pomocniczy służący do ustalenia współczynnika  $\lambda$  przy danym stosunku  $h/H$ , przy danej dokładności  $a$ .

Rysunki 19 i 20 określają granice, dla których postawione zagadnienie możemy obliczyć w sposób elementarny. Obszary możliwości przybliżonego obliczenia przedstawione są jako przykład na rys. 21 (zakresko-

wane). Dla wszystkich otworów przyjęto na tym rysunku ten sam wymiar  $2h$ . Zależności powyższe dają się wytlumaczyć fizycznie. Linie ekwipotencjalne i linie sił można wykreślić korzystając z (27) lub (28).

$\lambda = \frac{b}{2h} = 8$	4	2	1	0,5
$\frac{n}{\mu} = 0,74$	0,2	0,48	1	2
$\frac{l}{2h} = l + \frac{n}{h} = 14,5$	6	3,1	2	1,5

Rys. 21. Przykłady konfiguracji prostokątów, w których możliwe jest zastosowanie przedstawionej metody.

## 2.2. Obliczenie oporności paska z otworem prostokątnym

Najdogodniejszym sposobem jest przeprowadzenie obliczenia dla nitki uwidocznionej w dolnej części rysunku 15, tj. dla  $v = -V$  lub  $cv = -\pi$ . Otrzymujemy wówczas

$$x = \frac{H}{\pi} \left[ \operatorname{arch} \frac{2e^{cu} + a + 1}{a - 1} - \sqrt{a} \operatorname{arch} \frac{2ae^{-cu} + a + 1}{a - 1} \right].$$

Przyjmujemy, że w punkcie  $S$  funkcja  $u$  przybiera wartość  $B$ , tzn. że

$$\frac{b}{2} = \frac{H}{\pi} \left( \operatorname{arch} \frac{2e^{cB} + a + 1}{a - 1} - \sqrt{a} \operatorname{arch} \frac{2ae^{-cB} + a + 1}{a - 1} \right).$$

Zakładamy przy tym

$$Q = \frac{2e^{c_B} + a + 1}{a - 1} = \frac{1}{2} e^{\mu'} \approx \operatorname{ch} \mu'$$

Istotnie, podstawiając

$$e^{cB} \geq \frac{Ka-1}{K-1}, \quad (30)$$

gdzie

$$K = (1 + a)^2,$$

znajdujemy

$$e^{\mu'} \sim 2 \frac{3aK + K - a - 3}{(a-1)(K-1)}$$

Obliczając wartości tego wyrażenia dla  $a = 0,01$  do  $0,001$  i dla  $a = 1,1$  do  $100$  znajdujemy

$$Q \geq 206; \quad \mu' \geq 5,33,$$

ponieważ zaś

$$e^{-5,33} = 0,005,$$

przeto wielkość powyższą sąsiadującą z  $Q = 206$  możemy pominać. W ten sposób otrzymujemy

$$\frac{b}{2} = \frac{H}{\pi} \left[ cB + \ln \frac{4}{a-1} + \ln \left( 1 + \frac{a+1}{2e^{cB}} \right) + \sqrt{a} \operatorname{arch} \left( \frac{2ae^{-cB}}{a-1} + \frac{a+1}{a-1} \right) \right],$$

stąd zaś

$$cB = \frac{\pi b}{2H} - \ln \frac{4}{a-1} + \sqrt{a} \operatorname{arch} \left( \frac{a+1}{a-1} + \frac{2ae^{-cB}}{a-1} \right) - \ln \left( 1 + \frac{a+1}{2e^{cB}} \right). \quad (31)$$

Zakładamy dalej, że dla punktu  $T(x = -f)$  jest  $u = -A$ , tzn. że

$$f = \frac{H}{\pi} \left( \operatorname{arch} \frac{2e^{-cA} + a + 1}{a - 1} - \sqrt{a} \operatorname{arch} \frac{2ae^{cA} + a + 1}{a - 1} \right)$$

oraz że

$$\frac{2ae^{cA} + a + 1}{a - 1} = \frac{1}{2} e^r \approx \operatorname{ch} r \quad (32)$$

(dopuszczalność tego założenia przedstawimy później). Będziemy mieli wówczas

$$cA = \frac{\pi f}{H\sqrt{a}} - \ln \frac{4a}{a-1} + \sqrt{a} \operatorname{arch} \left( \frac{2e^{-cA}}{a-1} + \frac{a+1}{a-1} \right) - \ln \left( 1 + \frac{a+1}{2ae^{cA}} \right)$$

oraz na zasadzie wzoru napisanego poprzednio

$$cA + cB = \frac{\pi b}{2H} + \frac{\pi f}{H\sqrt{a}} - 2 \ln \frac{4\sqrt{a}}{a-1} - \ln \left( 1 + \frac{a+1}{2e^{cB}} \right) - \ln \left( 1 + \frac{a+1}{2ae^{cA}} \right) + \\ - \sqrt{a} \operatorname{arch} \left( \frac{a+1}{a-1} + \frac{2ae^{-cB}}{a-1} \right) + \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arch} \left( \frac{a+1}{a-1} + \frac{2e^{-cA}}{a-1} \right).$$

Cztery ostatnie wyrażenia zastępujemy przez ich przybliżenia otrzymane ze wzoru Taylora (dopuszczalność tego przybliżenia wykażemy później).

Możemy wówczas napisać

$$cA + cB - \frac{\pi b}{2H} - \frac{\pi f}{H\sqrt{a}} + \left( \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \operatorname{arch} \frac{a+1}{a-1} - 2 \ln \frac{4\sqrt{a}}{a-1} + \Delta, \quad (32)$$

przy czym wielkość  $\Delta$  ma charakter poprawki

$$\Delta = \frac{a-1}{2} e^{-cB} - \frac{a-1}{2a} e^{-cA}.$$

W celu obliczenia poprawki  $\Delta$  konieczne jest ustalenie wielkości  $A$  oraz obliczenie wielkości  $B$ .

Jako najmniejszą wartość  $f_{\min}$  odcinka  $f$  ustalamy taką wartość, że natężenie pola elektrycznego zarówno w punkcie  $T'$  na linii środkowej,

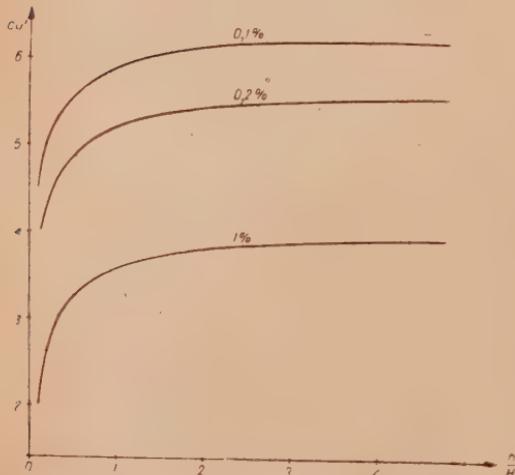
jak i w punkcie  $T$  na linii brzegowej różni się od wartości  $K_0 = \frac{V_1 - V_2}{H + h}$

natężenia pola równomiernego nie więcej niż o obraną dowolnie małą wielkość  $\alpha$  lub  $\beta$ .

Zakładając  $u = -u'$  obliczamy:

dla punktu  $T$ :  $K = K_0 \sqrt{\frac{e^{cu'} - 1}{e^{cu'} + \frac{1}{a}}} = K_0(1 - \beta)^2$ ;

dla punktu  $T'$ :  $K = K_0 \sqrt{\frac{e^{cu'} + 1}{e^{cu'} + \frac{1}{a}}} = K_0(1 + \alpha)^2$ ;



Rys. 22. Graficzne przedstawienie przebiegu zależności parametru  $cu'$  od stosunku  $h/H$ .

można łatwo wykazać, że  $\beta > \alpha$ . Wobec tego miarodajne jest obliczenie na (dolnej) linii brzegowej.

Rysunek 22 przedstawia zależność  $cu'$  od  $\frac{h}{H} = \sqrt{a} - 1$

przy założeniach  $\beta = 1\%$ ,  $0,5\%$  i  $0,1\%$ . Widać stąd, że postawiony warunek jest spełniony, jeżeli przyjąć:

przy dokładności

$$\begin{array}{ll} 1,0\% & cA = 4, \\ 0,5\% & cA = 5,5 \\ 0,1\% & cA = 6,2 \end{array} \quad (34)$$

Przekonujemy się, że przy  $cA=4$  i  $a=1,1$  do 100 jest zawsze

$$e^{-r} > 112 \quad \text{oraz} \quad e^{-r} < 0,005$$

i że wobec tego opuszczając we wzorze (32)  $e^{-r}$  w sąsiedztwie  $e^{-r}$  popełniamy błąd o dopuszczalnej wielkości.

W celu obliczenia  $cB$  możemy korzystać z równania (30), jeżeli punkt pracy na rysunku 19 lub 20 leży na jednej z wykreślonych krzywych; w przeciwnym przypadku przedstawiamy wyrażenie  $cB$  w postaci

$$cB + \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{2} e^{-cB} = \frac{\pi b}{2 \cdot H} + \sqrt{a} \ln \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \ln \frac{4}{a-1} = P \quad (35)$$

albo

$$cB + ke^{-cB} = P.$$

Możemy się przekonać, że  $ke^{-cB} \ll cB$  (stosunek tych liczb jest  $< \frac{1}{1000}$ ).

Wobec tego z dużym przybliżeniem napiszemy

$$cB = P.$$

Obecnie możemy obliczyć poprawkę  $\Lambda$ , która wynosi

$$\Lambda = \frac{a-1}{2} e^{-P} + \frac{a-1}{2a} e^{-cA}, \quad (36)$$

przy czym dla  $cA$  należy przyjąć wartości (34).

Po ustaleniu wartości  $cA$  i  $cB$ , można łatwo liczbowo wykazać, że przyjęte przez nas przybliżenie (odrzucenie wyrazów szeregów Taylora funkcji  $\ln$  i  $\text{arch}$ ) daje błąd o wiele mniejszy od przyjętego przez nas kresu. Otrzymana wartość  $f_{\min}$  wynosi

$$f_{\min} = \frac{H}{\pi} \left[ \sqrt{a} \ln \frac{4a}{a-1} + \sqrt{a} cA + \sqrt{a} \frac{a+1}{2ae^{cA}} - \text{arch} \frac{a+1}{a-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-cA} \right].$$

Przechodząc od pola elektrostatycznego do przepływowego zastępujemy

$V$  przez  $\frac{J}{\delta\gamma}$ , otrzymujemy

$$A + B = \frac{J}{\pi\gamma\delta} \left[ \frac{\pi f}{H+h} + \frac{\pi b}{2H} + \left( \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \ln \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - 2 \ln \frac{4\sqrt{a}}{a-1} + \Lambda \right].$$

Pod względem wymiaru  $A$  i  $B$  przedstawiają napięcie. Całkowitą oporność oznaczamy przez  $R$ , oporność zaś „złożoną z kawałków” I, II, III, IV (rys. 15) — przez  $R^*$

$$R^* = \frac{b}{2\gamma H\delta} + \frac{f}{\gamma(H+h)\delta}.$$

Piszemy zatem

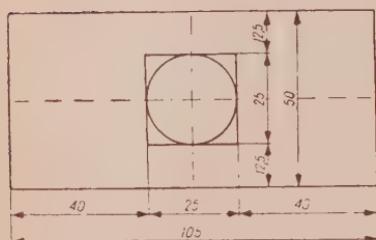
$$R = R^* + \Delta R^* = \frac{A+B}{J},$$

przy czym  $R$  jest opornością paska  $T T'' M'' M$  z usuniętym wewnętrznym prostokątem. Otrzymujemy

$$\Delta R^* = \frac{1}{\pi \gamma \delta} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \ln \frac{1 + a + 1}{1 + a - 1} - 2 \ln \frac{4 \sqrt{a}}{a - 1} + \lambda \right]. \quad (37)$$

Przykład liczbowy (rys. 23)

$$\delta = 0,1 \text{ mm}; h = 12,5 \text{ mm}; b = 25 \text{ mm}; H = 12,5 \text{ mm};$$



$$\frac{h}{H} = 1; \quad a = 4; \quad \lambda = \frac{b}{2h} = 1,$$

$$a = 0,01; \quad \frac{h}{H} = 1; \quad \lambda = 1; \quad K = 1,02.$$

Rys. 23. Rysunek do przykładu liczbowego.

Wzór (37):

$$\Delta R^* = \frac{1}{\pi \cdot 56000 \cdot 0,1} \left[ \left( 2 + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{2+1}{2-1} - 2 \ln \frac{4 \cdot 2}{3} + \lambda \right].$$

Wzór (35):

$$cB = \frac{\pi \cdot 25}{2 \cdot 12,5} + 2 \ln \frac{2+1}{2-1} - \ln \frac{4}{4-1} = 5,05.$$

Wzór (34)  $cA = 4$ ; wzór (36):

$$\lambda = \frac{4-1}{2} e^{-5,05} + \frac{4-1}{8} e^{-4} = 0,017,$$

$$f_{\min} = \frac{12,5}{\pi} \left( 2 \ln \frac{4 \cdot 4 \cdot e}{3} + \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 55} - \ln \frac{2+1}{2-1} \right) = 40,8 \approx 40 \text{ mm},$$

$$\Delta R^* = 4,55 \cdot 10^{-5} \Omega; \quad R^* = \frac{1}{56000 \cdot 0,1} \left( \frac{25}{2 \cdot 12,5} + \frac{40}{12,5 + 12,5} \right) = 46,4 \cdot 10^{-5} \Omega,$$

$$R^* + \Delta R^* = 51 \cdot 10^{-5} \Omega,$$

$$R = 37 \cdot 10^{-5} \Omega \text{ (patrz przykład w rozdziale 1.6).}$$

Procentowe zwiększenie oporności wskutek wycięcia kwadratowego otworu wynosi

$$\frac{51,0 - 37,5}{37,5} = \frac{13,5}{37,5} = 36\%$$

(przy otworze kołowym zwiększenie było 23,5%, rozdział 1.6 — przykład).

Katedra Podstaw Elektrotechniki  
Politechniki Łódzkiej

#### WYKAZ LITERATURY

1. Becker R.: Theorie der Elektrizität — Lipsk 1951.
2. Fuks B. A., Szabat B. W.: Funkcji kompleksnowo pieriemiennowo toka — Moskwa 1949.
3. Goworkow W. A.: Elektriczeskije i magnitnyje pola — Moskwa 1951.
4. Lamb: Hydrodinamika — Moskwa 1947.
5. Lawrientiew M. A., Szabat B. W.: Mietody tieorii funkciij kompleksnowo pieriemiennowo toka — Moskwa 1951.
6. Ollendorff F.: Potentialfelder der Elektrotechnik — Berlin 1932.

Б. КОНОРСКИ

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХ СЛУЧАЕВ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

##### Резюме

1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОГО КОНДЕНСАТОРА, ВО ВНУТРЕННЕЕ ПРОСТРАНСТВО КОТОРОГО ВВЕДЕН ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИЙ ЦИЛИНДР С КРУГОВЫМ СЕЧЕНИЕМ, ПРИЧЕМ ОСЬ ЭТОГО ЦИЛИНДРА ПАРАЛЛЕЛЬНА К НАКЛАДКАМ КОНДЕНСАТОРА И НАХОДИТСЯ НА СДИНАКОВОМ РАССТОЯНИИ ОТ НИХ

Если отношение  $\varrho$  диаметра цилиндра  $R_0$  к расстоянию  $h$  между накладками мало, можно установить такие поверхности, что в ограниченном ними внешнем пространстве относительная разница между действительными напряжениями поля и напряжением однородного поля меньше произвольно принятой малой величины  $\beta$  (рис. 2 при  $\beta=0,01$  и  $\beta=0,02$ ).

Общее решение задачи может быть получено путем конформного преобразования поиска с вырезанным полукругом на полуплоскость. Такое преобразование математически исполнимо, однако приводит к дифференциальному уравнению третьего рода с двумя параметрами, величины которых нелегко определить доступным способом. Поэтому практическая ценность этого решения невелика. Равным образом и приблизительные формулы касающиеся упомянутой задачи и встречающиеся в некоторых учебниках гидродинамики довольно сложны. Ввиду этого приведен здесь элементарный и простой способ решения, опирающийся на применяемых в электротехнике методах.

Если отношение  $\varrho = R_0 / h < 0,4$ , можно представить упомянутое электрическое поле внутри конденсатора через многократное отражение линейного диполя находящегося на оси симметрии конденсатора. Поверхностями отражения являются обе плоскости его накладки. Получается таким образом ряд (5), в котором величина  $k$  зависит от момента диполя. Ряд (5) исполняет граничные условия; величину  $k$  можно

найти выводя соответственное выражение для пункта  $x=0, y=\pm R$ , в котором потенциал равен нулю. Получается таким образом формула (8), которая при  $\varrho < 0,4$  даёт погрешность допустимую в практике ( $< 0,6\%$ ).

Выше упомянутая формула неприменима при  $\varrho > 0,4$ . Объясняется это тем, что расстояние обоих зарядов диполя при сравнительно большом диаметре цилиндра не так мало, чтобы им пренебречь. Рассматривая этот случай следует принять как предпосылку определённое расстояние с между обоими зарядами. Применяя тот-же метод получаем формулу (11), точность которой равна предыдущей и применима вплоть до  $\varrho = 0,8$ . Отношение  $\varrho = \frac{c}{h}$  представлено графически на рис. 6 в зависимости от  $\varrho$ . Если с идёт к нулю, формула (11) превращается в (8). Получается при этом выражение представляющее комплексный потенциал в пространстве вблизи на-кладок конденсатора.

Случаи, при которых  $\varrho > 0,8$  не разрешимы с помощью описанного метода.

В дальнейшем рассмотрено в статье, на каком расстоянии  $a$  от оси цилиндра пренебрегается относительная разница « между напряжением деформированного и равномерного поля. Результат подсчётов представлен графически на рис. 7, при-нимая  $a = 0,01$ .

Найбольшие величины напряжения поля выступающие в деформированном поле представлены в формуле (14) и на рис. 8.

Эти формулы можно также использовать для подсчёта сопротивления пояска с вырезанным посередине кругом. С помощью простых преобразований получаются формулы (15) до (17), представляющие увеличение сопротивления такого пояска определённой или бесконечной длины. Цифровой подсчёт указывает, что увеличение это в подсчитываемом случае ( $\varrho = 0,5$ ) составляет  $23,5\%$ .

С помощью тех-же рассуждений можно подсчитать увеличение сопротивления, если в пояске находится несколько отверстий размешённых последовательно одно за другим. Эти же формулы применимы также для определения, как уменьшится магнитный поток проникающий через поясок в продольном направлении: можно наконец подсчитать увеличение ёмкости цилиндра, во внутреннее пространство кото-рого введён один или несколько цилиндров, выполненных из электропроводящего материала.

Если ось цилиндра не расположена в симметриальной плоскости конденсатора, получаются формулы более сложные, цифровое решение которых не совсем лёгко.

## 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОГО КОНДЕНСАТОРА ВО ВНУТРЕННЕЕ ПРОСТРАНСТВО КОТОРОГО ВВЕДЕН ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД С ДВУМЯ БОКОВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ К НАКЛАДКАМ КОНДЕНСАТОРА.

Принято при этом симметричное положение параллелепипеда. Этот случай тоже разрешим путём конформного преобразования пояска с вырезанным прямоугольни-ком на полуплоскость (рис. 16). Применяя формулу Шварца-Христоффеля получаются сложные эллиптические интегралы, которые не легко разрешить. Если однако преобразовать конформно только половину прямоугольника, сперва на плоскость, а потом на поясок, получается известная зависимость (27), которую можно также представить в виде (28). Можно тогда установить условие (29), при выполнении которого напряжения тока в пунктах  $Q$  и  $S$  (рис. 16) разнятся сравнительно меньше чем « от напряжения равномерного поля. Для разных величин « выводится из формулы (29) отношение ширины прямоугольника к его высоте (рис. 19 и 20). Оли-санный метод применим только для пунктов расположенных над соответственными кривыми; поэтому можно применять его только при прямоугольниках имеющих опре-

елённое положение относительно накладок конденсатора и имеющих определённую форму (примеры таких прямоугольников указаны на рис. 21).

Равно как и в п. I можем применить выведенные формулы для подсчёта сопротивления пояска с вырезанным прямоугольным отверстием. Оказывается при этом, что в зависимости от формы прямоугольника и от ширины пояска получается некоторая необходимая минимальная длина пояска.

Разница между теоретическим сопротивлением прямоугольных частей, на которые можно разделить поясок и действительным сопротивлением пояска с вырезанным прямоугольником представляет формула (37). Отсюда получается разница между оследним сопротивлением и сопротивлением полного пояска. Если высота вырезанного квадрата равна диаметру круга в подсчитанном в п. I примере увеличение сопротивления составляет  $36^\circ$ .

B. KONORSKI

UNTERSUCHUNG ZWEIER SPEZIALFÄLLE EINES EBENEN  
ELEKTROSTATISCHEN FELDES

Zusammenfassung

DAS ELEKTRISCHE FELD EINES EBENEN KONDENSATORS, IN DESSEN INNENRAUM IN LEITENDER KREISZYLINDER MIT EINER ZU DEN BELEGUNGEN DES KONDENSATORS PARALLELEN UND VON BEIDEN GLEICHENTFERNTEN ACHSE HINEIN-  
GEBRACHT WURDE.

Hat der Zylinder einen Durchmesser, dessen Verhältnis zum Plattenabstand klein ist, so kann man Flächen entwerfen, ausserhalb welcher der relative Unterschied zwischen der wirklichen Feldstärke und der Feldstärke des homogenen Feldes kleiner als eine beliebig angenommene kleine Zahl  $\beta$  ist (Bild 1 mit  $\beta = 0,01$  bzw.  $0,02$ ).

Die eingangs gestellte Aufgabe kann man mittels konformer Abbildung eines Streifens mit herausgeschnittenem Halbkreis auf eine Halbebene lösen. Dieses Problem ist mathematisch lösbar, es führt jedoch zu einer Differentialgleichung dritter Ordnung mit zwei Konstanten, deren Wert schwer zu bestimmen ist. Der praktische Wert dieser Lösung ist demgemäß klein. Auch sind die Näherungsformeln, die in Lehrbüchern der Hydrodynamik zu finden sind, ziemlich kompliziert. Deshalb wird hier ein sehr einfaches, auf einer elektrischen Methode beruhendes Verfahren entwickelt.

Ist das Verhältnis  $\varrho$  von Zylinderdurchmesser und Plattenabstand  $< 0,4$ , so wird versucht, das sich ergebende Feld durch wiederholte Spiegelung eines in der Mitte des Kondensators befindlichen Liniendipols an den Kondensatorbelegungen abzubilden. Es ergibt sich die Reihe (5), wobei  $k$  vom Dipolmoment abhängt; die Grenzbedingungen werden durch die Reihe (5) erfüllt, die Grösse  $k$  kann man berechnen, indem man den entsprechenden Ausdruck für den Punkt  $x=0, y = \pm R$  bildet, für welchen das Potential gleich Null ist. Das Resultat bringt die Formel (8), die in angegebenen Grenzen eine für die Praxis genügende Genauigkeit bietet (0,6%). Diese Formel versagt jedoch, wenn  $\varrho > 0,4$  ist. Das Versagen wird dadurch erklärt, dass der Abstand der beiden Ladungen im Dipol bei verhältnismässig grossem Zylinderdurchmesser nicht mehr als vernachlässigbar klein angenommen werden darf. Demgemäß wird bei Behandlung dieses Falles ein end-

licher Abstand zwischen den Dipolladungen vorausgesetzt. Durch Anwendung derselben Methode kommt man zum Ausdruck (11), der die gleiche Genauigkeit wie früher aufweist, jedoch durch  $\varrho \leq 0,8$  eingeschränkt wird. Die Grösse  $c$  wird im Bild 6 dargestellt. Es wird ferner gezeigt, dass mit  $c \rightarrow 0$  die Formel (11) in (8) übergeht und es wird für den Bereich in der Nähe der Kondensatorbelegungen ein Ausdruck für das komplexe Potential gewonnen.

Die Fälle mit  $\varrho > 0,8$  lassen sich offenbar nicht mehr durch das gleiche Verfahren lösen.

Weiters wird in der Abhandlung die Frage behandelt, in welcher Entfernung  $a_m$  von der Zylinderachse der relative Unterschied  $a$  zwischen der Feldstärke des verzerrten und des homogenen Feldes vernachlässigbar ist (Bild 7 für  $a = 0,01$ ). Die Maximalwerte der auftretenden Feldstärke im Verhältnis zur Feldstärke des homogenen Feldes zeigt Formel (14) und Bild 8.

Dieselben Formeln kann man benützen, um den elektrischen Widerstand eines Streifens mit herausgeschnittenem Kreis zu berechnen. Durch einfache Umformungen kommt man zu den Ausdrücken (15) bis (17), die die Vergrösserung des betreffenden Widerstandes bei Streifen von endlicher und unendlich grosser Länge des Streifens angeben. (Wie ein angeführtes Zahlenbeispiel zeigt, beträgt diese Vergrösserung 23,5% im angenommenen Fall  $\varrho = 0,5$ .)

Durch dieselben Überlegungen kann man die Vergrösserung des Widerstandes angeben für den Fall von zwei oder mehreren in einer Reihe liegenden Kreisausschnitten (Bild 10 und 11). Die entwickelten Formeln lassen sich auch anwenden, um die Verkleinerung des magnetischen Flusses zu bestimmen, der in der Längsrichtung des ebenen Streifens wirkt; schliesslich kann man damit auch die Vergrösserung der Kapazität eines Kondensators berechnen, in dessen Innenraum ein oder mehrere quergelegene Zylinder aus leitendem Material hineingebracht wurden.

Für den Fall, dass der Kreiszylinder im Verhältnis zur Mittellinie des Kondensators exzentrisch liegt, ergeben sich ziemlich umfangreiche und nicht einfach numerisch auflösbare Ausdrücke.

## 2. DAS ELEKTRISCHE FELD EINES EBENEN KONDENSATORS, IN DESEN INNENRAUM EIN LEITENDES PARALLELEPIPED MIT ZWEI ZU DEN BELEGUNGEN DES KONDENSATORS PARALLELEN UND VON IHNEN GLEICHENTFERNTEN SEITENFLÄCHEN HINEINGEbracht WURDE.

Auch dieses Problem wäre zu lösen mittels konformer Abbildung eines Streifens mit herausgeschnittenem Viereck (Bild 16) auf eine Halbebene (nach Schwartz-Christoffel). Auf diesem Weg kommen wir jedoch zu komplizierten elliptischen Integralen, die nicht einfach zu behandeln sind. Wenn wir aber nur die Hälfte des Rechtecks dh. einen Winkel desselben konform auf eine Ebene und dann auf einen Streifen abbilden, so bekommen wir die bekannte Beziehung (27), die auch in Parameterform (28) dargestellt werden kann. Es lässt sich dann eine Beziehung (29) finden, bei deren Erfüllung sich die Feldstärke in den Punkten  $Q$  und  $S$  (Bild 16) relativ um weniger als  $a$  von der Feldstärke des homogenen Feldes unterscheidet. Für verschiedene Werte von  $a$  bietet die Formel (29) das Verhältnis von Rechtecksbreite zu Rechteckshöhe (Bild 19 und 20). Die beschriebene Methode lässt sich demzufolge nur für Punkte anwenden, die oberhalb der betreffenden Kurven liegen. Es kommen also im Verhältnis zum Kondensatorabstand nur bestimmte Rechteckformen in Frage. (Dies ist beispielweise in Bild 21 angedeutet). Man kann ebenso wie oben bei A die entwickelten Formeln benützen, um den Widerstand eines

streifens mit herausgeschnittenem Viereck zu berechnen. Es zeigt sich, dass aus der gegebenen Form des Rechteckes und der Breite des Streifens sich die betreffende minimale Gesamtlänge des Streifens ergibt.

Der Unterschied zwischen dem theoretischen Widerstand der aneinandergeklebten Stütze verschiedener Breite und dem wirklichen Widerstand des Streifens mit herausgeschnittenem Rechteck gibt Formel (37). Daraus ergibt sich die Differenz zwischen letzterem und dem Widerstand des vollen Streifens. Falls die Rechteckshöhe gleich dem Kreisdurchmesser in dem unter A behandeltem Beispiel ist, beträgt die Widerstandserhöhung 36%.



621.3.015.33

S. WĘGRZYN

## Stany nieustalone w układach pobudzanych periodycznie

Rękopis dostarczono 31. 3. 1954

**Streszczenie.** Włączenie dowolnej periodycznej siły elektromotorycznej w liniowym układzie elektrycznym rozpatruje autor jako wyłączenie jednej z zespołu dwóch równych, lecz przeciwnie skierowanych sił elektromotorycznych, które przed momentem wyłączenia jednej z nich wymuszały w danym układzie dwa równe, przeciwnie skierowane stany ustalone. Metoda ta pozwala na uzyskanie dużej prostoty obliczeń oraz daje oryginalną fizyczna interpretację zagadnienia.

Przykładowo rozpatrzone włączenie generatora prądowego na układ równoległy  $R L C$ , włączenie siły elektromotorycznej o przebiegu piłowym w układzie szeregowym  $RL$  oraz włączenie siły elektromotorycznej o przebiegu sinusoidalnym, sprostowanym w układzie szeregowym  $R C$ . W tych dwóch ostatnich przykładach obliczenie stanu ustalonego przeprowadzono za pomocą metody polegającej na analizie przebiegów w jednym okresie stanu ustalonego.

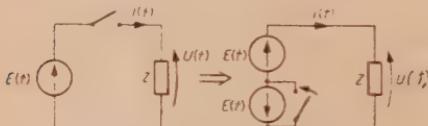
### 1. WSTĘP

W poprzedniej pracy [2], omawiającej przebiegi nieustalone powstałe w poszczególnych stopniach wielostopniowego wzmacniacza, autor stosował metodę dwóch przeciwnych stanów ustalonych polegającą na m., że włączenie sinusoidalnej siły elektromotorycznej na wejście wzmacniacza zostało rozpatrzone jako wyłączenie jednej z zespołu dwóch równych, lecz przeciwnie skierowanych sił elektromotorycznych. Pozwoliło to na uzyskanie dużej prostoty obliczeń oraz umożliwiło graficzne ich wykonanie.

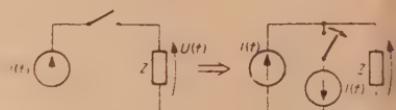
Metodę tę można stosować również przy obliczaniu stanów nieustalonych powstających w liniowych układach elektrycznych przy włączeniu dowolnego pobudzenia periodycznego. Pozwala to na uzyskanie również i w tych przypadkach dużej prostoty obliczeń, a otrzymane rozwiązania mają przy tym postać doskonale nadającą się do dyskusji technicznej.

## 2. STOSOWANIE METODY DWÓCH PRZECIWNYCH STANÓW USTALONYCH W PRZYPADKU DOWOLNEGO POBUDZENIA PERIODYCZNEGO

Włączenie siły elektromotorycznej o przebiegu periodycznym w liniowym układzie elektrycznym o zerowych warunkach początkowych można rozpatrywać jako wyłączenie jednej z zespołu dwóch równych sił elektromotorycznych pracujących przeciw sobie, jak to zilustrowano na rys. 1.



Rys. 1. Włączenie periodycznej siły elektromotorycznej  $E(t)$  możemy rozpatrywać jako wyłączenie jednej z zespołu dwóch równych sił elektromotorycznych pracujących przeciw sobie.



Rys. 2. Włączenie generatora prądu o periodycznym przebiegu prądu możemy traktować jako wyłączenie jednego z dwóch identycznych generatorów prądowych pracujących w takim układzie.

Jeżeli bowiem w układzie  $Z$  nie ma innych sił elektromotorycznych i jeżeli warunki początkowe tego układu są zerowe, to przed włączeniem siły elektromotorycznej  $E(t)$  napięcia na każdym z elementów i prądy w każdym z elementów tego układu są równe零. Stan ten możemy rozpatrywać jako sumę dwóch równych, lecz przeciwnie skierowanych stanów ustalonych, wywołanych przez dwie równe i przeciwnie skierowane siły elektromotoryczne. Wyłączając jedną z nich przerywamy stan ustalony, który ona wymuszała i powodujemy zaburzenie wywołane wyładowaniem się poszczególnych cewek i kondensatorów układu. Całkowity więc stan nieustalony w liniowym układzie elektrycznym wywołany włączeniem dowolnie periodycznej siły elektromotorycznej możemy przedstawić jako sumę:

- stanu ustalonego (oznaczać go będziemy indeksem  $s$ ), wywołanego przez tę włączaną siłę elektromotoryczną,
- zaburzenia (oznaczać go będziemy indeksem  $z$ ), wywołanego wyłączeniem równej i przeciwnie skierowanej siły elektromotorycznej, która pracowała w danym układzie w stanie ustalonym przed momentem wyłączenia.

Na rys. 2 przedstawiony jest układ dla przypadku włączenia generatora prądowego o nieskończonym wielkim oporze wewnętrzny.

Zagadnienie stanu nieustalonego, powstającego przy włączeniu siły elektromotorycznej o przebiegu periodycznym w układzie liniowym można zatem sprowadzić do obliczenia stanu ustalonego i zaburzenia.

Stan ustalony obliczamy za pomocą jakiejkolwiek metody elektrotechniki teoretycznej, stosowanej do obliczania stanów ustalonych d

rzebiegów periodycznych, przy czym w wielu przypadkach bardzo dobra jest metoda przedstawiona w rozdz. 3 i 4, polegająca na analizie rzebiegów dla jednego okresu stanu ustalonego.

Obliczenie zaburzenia sprowadza się w przypadku obwodów o stałych kupionych i przy zastosowaniu rachunku operatorowego do przekształcenia odwrotnego funkcji typu

$$\frac{U_c(0)}{Z(p)}, \quad \frac{pLJ(0)}{Z(p)}$$

ądź

$$\frac{U_c(0) Y_1(p)}{Y_2(p)}, \quad \frac{pLJ(0) Y_1(p)}{Y_2(p)},$$

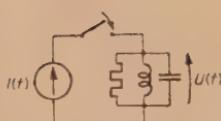
więc wymiernych funkcji algebraicznych, co pozwala na zastosowanie prostych wzorów na przekształcenie odwrotne.

### 3. WŁĄCZENIE IMPULSOWEGO GENERATORA PRĄDOWEGO NA UKŁAD RÓWNOLEGŁY RLC

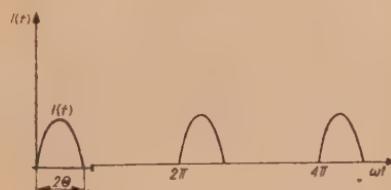
W chwili  $t=0$  zostaje włączony na układ równoległy  $RLC$ , o zerowych warunkach początkowych (rys. 3), generator prądowy o nieskończonym wielkim oporze wewnętrznym i prądzie określonym następującą funkcją periodyczną w okresie  $T$

$$J(t) = \begin{cases} J \frac{\cos(\omega t - \Theta) - \cos \Theta}{1 - \cos \Theta} & \text{dla } 2n\pi \leq t \leq 2n\pi + 2\Theta \\ 0 & \text{dla } 2n\pi + 2\Theta \leq t \leq 2\pi(n+1) \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$



Rys. 3. Włączenie impulsowego generatora prądowego na układ równoległy  $RLC$ .

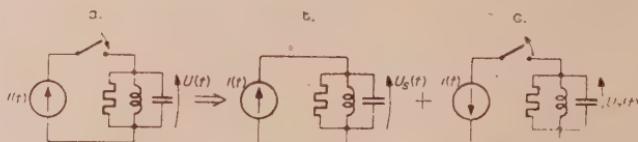


Rys. 4. Przebieg prądu rozpatrywanego generatora impulsowego.

Rzebieg tego prądu przedstawiono na rys. 4.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Rozwiążanie tego zagadnienia przez obliczenie splotu funkcji prowadzi do dużych trudności rachunkowych, a otrzymany przy tym, z ogromnym nakładem pracy, wynik ma postać skomplikowaną, mało przejrzystą, nie nadającą się do dyskusji technicznej. Rozwiążanie tego zagadnienia za pomocą metody splotu funkcji zostało przedstawione w pracy [1]. Porównanie obu przeliczeń stanowi dobrą ilustrację gromnych korzyści, jakie daje metoda dwóch przeciwnych stanów ustalonych.

Włączenie generatora prądowego wywoła na obwodzie napięcie  $U(t)$ . Obliczając przebieg tego napięcia metodą dwóch przeciwnych stanów ustalonych, rozpatrujemy włączenie generatora na obwód przedstawiony na rys. 3 jako wyłączenie jednego z zespołu dwóch identycznych genera-



Rys. 5. Napięcie nieustalone wywołane włączeniem generatora prądowego w układzie a. można obliczyć jako sumę napięcia ustalonego  $U_{st}$  układu b. i napięcia zaburzeniowego  $U_s(t)$  wywołanego wyłączeniem generatora w układzie c.

torów, pracujących w układzie pokazanym na rys. 2, co sprowadza się w tym przypadku do obliczenia przebiegów w układach b i c, jak to pokazano na rys. 5.

Przed momentem wyłączenia generator w układzie c pracował przy stanie ustalonym w obwodzie. Wskutek wyłączenia generatora zostaje przerwany stan ustalony, który on wymusza i występuje zaburzenie spowodowane wyładowaniem się kondensatora i cewki. Napięcie nieustalone  $U(t)$  możemy więc obliczyć jako sumę:

- napięcia ustalonego  $U_s(t)$  wymuszanego na rozpatrywanym obwodzie przez generator pracujący w układzie b,
- napięcia zaburzeniowego  $U_s(t)$  wywołanego wyłączeniem generatora pracującego w układzie c.

### 3.1. Napięcie ustalone

Dla obliczenia napięcia ustalonego w tym przypadku najprościej jest rozłożyć funkcję prądu  $J(t)$  na szereg Fouriera

$$J(t) = J_0 + \sum_{k=1}^n J_k \cos k(\omega t - \Theta),$$

gdzie

$$J_0 = \frac{I}{\pi(1 - \cos \Theta)} (\sin \Theta - \Theta \cos \Theta),$$

a

$$J_k = \frac{I}{\pi(1 - \cos \Theta)} \left( \frac{\sin(k+1)\Theta}{k+1} + \frac{\sin(k-1)\Theta}{k-1} - \frac{2 \sin k\Theta \cos \Theta}{k} \right).$$

Prąd  $k$ -tej harmonicznej wywoła w obwodzie napięcie

$$U_k(t) = U_k \cos(k\omega t - k\Theta - \varphi_k),$$

ſdzie

$$U_k = J_k Z(k\omega),$$

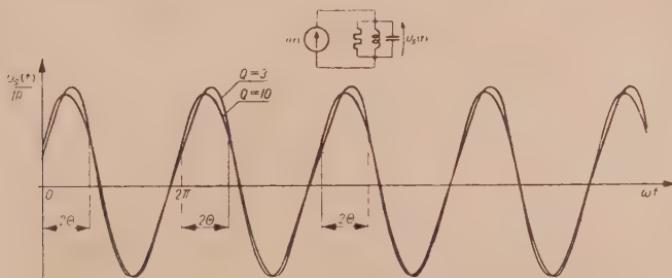
$$Z(k\omega) = \frac{1}{\sqrt{G^2 + \left(k\omega C - \frac{1}{k\omega L}\right)^2}}, \quad \text{and} \quad \varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{k\omega C - \frac{1}{k\omega L}}{G}.$$

Napięcie wywołane na obwodzie przez składową stałą  $J_0$  będzie równe zera, gdyż przyjmujemy, że opór czynny cewki jest równy zera.

Napięcie ustalone  $U_s(t)$  będzie zatem sumą poszczególnych napięć harmonicznych

$$U_s(t) = \sum_{k=1}^n U_k \cos(k\omega t - k\vartheta - \varphi_k).$$

Takie przedstawienie napięcia  $U_s(t)$  jako sumy napięć sinusoidalnych jest w tym przypadku bardzo dogodne; orientuje nas od razu co do wartości harmonicznych. Przebiegi tego napięcia dla  $2\theta = 120^\circ$ ,  $\omega = \omega_0$  dla obwodów o dobroci  $Q = 10$  i  $Q = 3$  pokazano na rys. 6. Przy  $Q = 10$



Rys. 6. Przebieg napięcia ustalonego  $Q=10$ ,  $Q=3$ ,  $\Theta=60^\circ$ .

ograniczyliśmy się do drugiej harmonicznej, gdyż amplituda trzeciej jest 76 razy mniejsza od amplitudy podstawowej. Przy  $Q=3$  ograniczyliśmy się do trzeciej harmonicznej, gdyż amplituda czwartej jest już 160 razy mniejsza od amplitudy podstawowej.

### 3.2 Napięcie zaburzeniowe

Napięcie zaburzeniowe  $U_z(t)$  jest wywołane wyłączeniem w chwili  $t=0$  generatora w układzie  $c$ . Wskutek wyłączenia generatora zostaje przerwany stan ustalony, który on wymuszał i występuje zaburzenie spowodowane wyładowaniem się w rozpatrywanym przez nas obwodzie kondensatora, na którym w chwili wyłączenia panowało napięcie  $U_c(0)$ , cewki, przez którą płynął w chwili wyłączenia prąd  $J_L(0)$ . Napięcie za-

burzeniowe będzie więc sumą napięcia zaburzeniowego  $U_{1z}(t)$ , pochodzącego od wyładowania się kondensatora,

$$U_{1z}(t) = \frac{U_c(0)}{\cos \beta} e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \beta),$$

gdzie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \delta^2}, \quad \delta = \frac{1}{2RC},$$

a

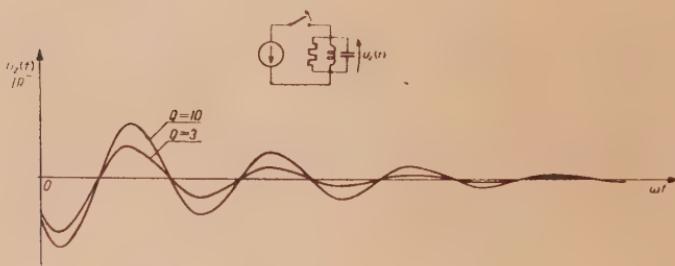
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\delta}{\omega_0},$$

oraz napięcia zaburzeniowego  $U_{2z}(t)$ , pochodzącego od wyładowania się cewki  $L$

$$U_{2z}(t) = -\frac{J_L(0)}{C\omega_0} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t.$$

Całkowite napięcie zaburzeniowe  $U_z(t)$  jest więc równe

$$U_z(t) = \left[ \frac{U_c(0)}{\cos \beta} \cos(\omega_0 t + \beta) - \frac{J_L(0)}{C\omega_0} \sin \omega_0 t \right] e^{-\delta t}.$$



Rys. 7. Przebieg napięcia zaburzeniowego  $Q=10$ ,  $Q=3$ .

Wartości początkowe  $U_c(0)$  i  $J_L(0)$  są to wartości dla chwili  $t=0$  napięcia ustalonego na kondensatorze i prądu ustalonego w cewce, wymuszane przez generator identyczny jak pracujący w układzie b, lecz o przeciwniej kierunkowości prądu. Wartości te można obliczyć wprost z poprzednio znalezionejgo stanu ustalonego. Mianowicie:

$$U_c(0) = -U_s(0) = -\sum_{k=1}^n U_k \cos(k\Theta + \varphi_k),$$

$$J_L(0) = -J_0 + \sum_{k=1}^n \frac{U_k \sin(k\Theta + \varphi_k)}{k\omega L}.$$

Przebiegi napięcia zaburzeniowego  $U_z(t)$  dla obwodów, dla których poprzednio znaleźliśmy stan ustalony, pokazano na rys. 7.

### 3.3. Napięcie nieustalone

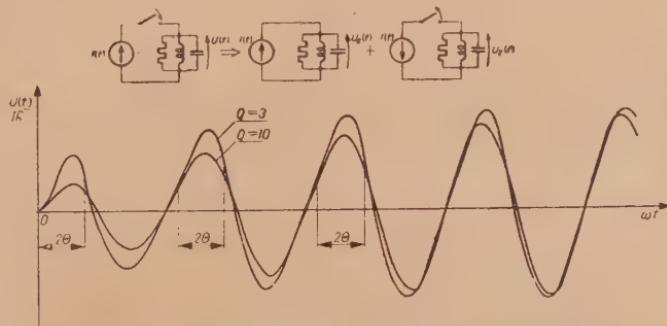
Napięcie nieustalone  $U(t)$  jest sumą napięcia ustalonego i napięcia zaburzeniowego, jest więc

$$U(t) = U_s(t) + U_z(t).$$

W naszym przypadku

$$U(t) = \sum_{k=1}^n U_k \cos(k\omega t - k\Theta - \varphi_k) +$$

$$+ \left[ \frac{U_c(0)}{\cos \beta} \cos(\omega_0 t + \beta) - \frac{J_L(0)}{C\omega_0} \sin \omega_0 t \right] e^{-\delta t}.$$



Rys. 8. Przebieg napięcia nieustalonego  $Q=10$ ,  $Q=3$ ,  $\Theta=60^\circ$ .

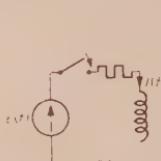
Przebiegi tego napięcia dla rozpatrywanych poprzednio dwóch przypadków  $Q=10$  i  $Q=3$  oraz  $2\Theta=120^\circ$  i  $\omega=\omega_0$  przedstawiono na rys. 8.

#### 4. WŁĄCZANIE SIŁY ELEKTROMOTORYCZNEJ O PRZEBIEGU PIŁOWYM DO UKŁADU SZEREGOWEGO $RL$

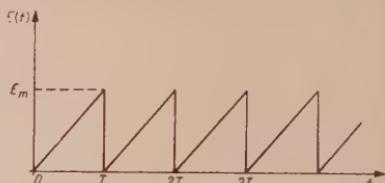
W chwili  $t=0$  zostaje włączona do układu szeregowego  $RL$  (rys. 9) periodyczna siła elektromotoryczna  $E(t)$  o przebiegu piłowym przedstawionym na rys. 10.

Włączenie siły elektromotorycznej  $E(t)$  wywoła w obwodzie prąd  $J(t)$ . Obliczając przebieg tego prądu metodą dwóch przeciwnych stanów ustalonych, rozpatrujemy włączenie siły elektromotorycznej w obwodzie przedstawionym na rys. 10 jako wyłączenie jednej z zespołu dwóch równych sił elektromotorycznych, pracujących w układzie pokazanym na

rys. 1, co sprowadza się w tym przypadku do obliczenia przebiegów w układach *b* i *c*, jak to pokazano poglądowo na rys. 11.



Rys. 9. Włączenie siły elektromotorycznej o przebiegu piłowym do układu szeregowego  $R$   $L$ .



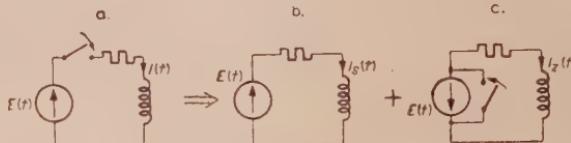
Rys. 10. Przebieg rozpatrywanej siły elektromotorycznej.

#### 4.1. Obliczenie stanu ustalonego

Siła elektromotoryczna  $E(t)$  jest funkcją okresową o okresie  $T$ , przy czym w przedziale  $0 < t < T$  przebieg tej funkcji określony jest wzorem

$$E(t) = E_m \frac{t}{T}$$

Przebieg prądu ustalonego  $J_s(t)$  moglibyśmy znaleźć rozkładając, podobnie jak w rozdz. 3, funkcję  $E(t)$  na szereg Fouriera. W tym przypadku dużo dogodniejsze jest jednak zastosowanie poniższej metody rozwiązań.



Rys. 11. Prąd nieustalony wywołany włączeniem siły elektromotorycznej w układzie *a*. można obliczyć jako sumę prądu ustalonego  $Z(t)$  układu *b* i prądu zaburzeniowego wywołanego wyłączeniem siły elektromotorycznej w układzie *c*.

Ponieważ siła elektromotoryczna jest funkcją okresową o okresie  $T$ , więc prąd ustalony w rozpatrywanym przez nas obwodzie również funkcją okresową o okresie  $T$ , przy czym przebieg tej funkcji w przedziale  $0 < t < T$  możemy łatwo znaleźć dokonując odwrotnego przekształcenia funkcji

$$J_s(p) = \frac{\bar{E}(p)}{R + pL} + \frac{pLJ(0)}{R + pL},$$

gdzie

$$\bar{E}(p) = \frac{E_m}{pT},$$

a  $J(0)$  oznacza wartość prądu ustalonego na początku okresu. Po dokonaniu przekształcenia odwrotnego otrzymamy

$$J_s(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{t}{T} - \frac{1}{aT} (1 - e^{-at}) \right] + J(0) e^{-at}.$$

$J(0)$  możemy łatwo obliczyć z warunku ciągłości funkcji określającej przebieg prądu płynącego przez cewkę, czyli w naszym przypadku z relacji

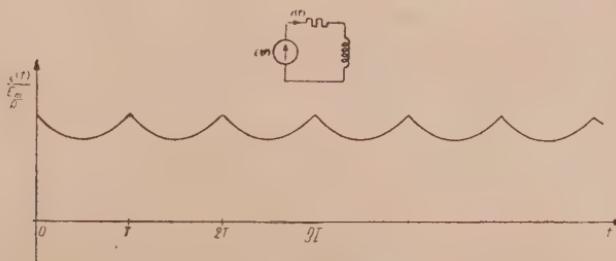
$$J_s(0) = J_s(T).$$

Otrzymamy

$$J(0) = \frac{E_m}{R} \left[ -\frac{1}{aT} + \frac{1}{1 - e^{-aT}} \right],$$

a po podstawieniu wartości  $J(0)$  do otrzymanego poprzednio wzoru na  $J_s(t)$  mamy ostatecznie

$$J_s(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{t}{T} - \frac{1}{aT} + \frac{e^{-at}}{1 - e^{-aT}} \right].$$



Rys. 12. Przebieg prądu ustalonego  $aT=1$ .

Przebieg tej funkcji periodycznej o okresie  $T$ , określonej w przedziale  $0 < t < T$  powyższym wzorem, przedstawiono na rys. 12.

#### 4.2. Prąd zaburzeniowy

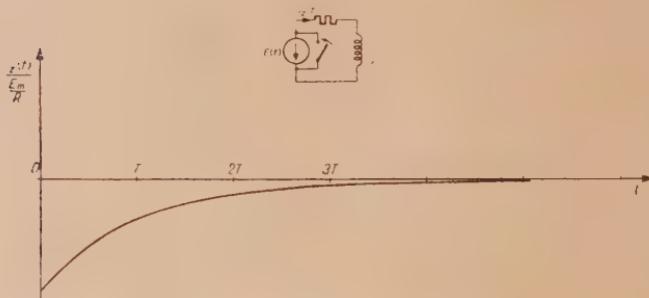
Prąd zaburzeniowy wywołany jest wyłączeniem w układzie przedstawionym na rys. 11c w chwili  $t=0$  siły elektromotorycznej  $E(t)$ . Wskutek tego wyłączenia zostaje przerwany stan ustalony, który ona wymuszała i występuje zaburzenie spowodowane wyładowaniem się cewki, przez którą płynął w chwili wyłączenia prąd  $J(0)$ . Prąd zaburzeniowy jest więc równy

$$J_z(t) = -J(0)e^{-at}.$$

Wartość początkowa  $J(0)$  jest to wartość dla chwili  $t=0$  prądu ustalonego wymuszanego przez taki sam generator jak pracujący w układzie b,

tylko o przeciwnej kierunkowości; wartość tę można obliczyć wprost z poprzednio znalezionego stanu ustalonego. Jest mianowicie

$$J_z(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{1}{aT} - \frac{1}{1 - e^{-aT}} \right] e^{-at}.$$



Rys. 13. Przebieg prądu zaburzeniowego  $aT=1$ .

Przebieg tego prądu zaburzeniowego przedstawiono na rys. 13.

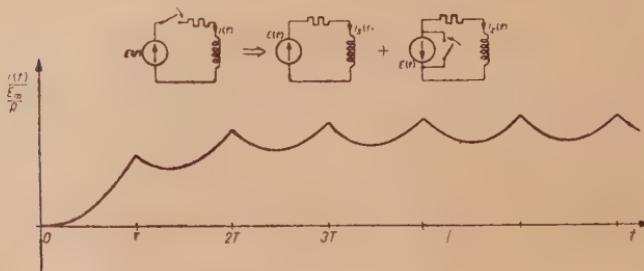
### 4.3. Prąd nieustalony

Prąd nieustalony jest sumą prądu ustalonego i prądu zaburzeniowego. W tym przypadku przebieg prądu nieustalonego można przedstawić jako sumę periodycznej funkcji o okresie  $T$ , którą w przedziale  $0 < t < T$  można wyrazić wzorem

$$J_s(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{t}{T} - \frac{1}{aT} + \frac{e^{-at}}{1 - e^{-aT}} \right]$$

oraz aperiodycznej funkcji

$$J_z(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{1}{aT} - \frac{1}{1 - e^{-aT}} \right] e^{-at}.$$

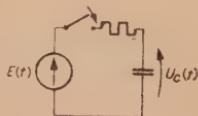


Rys. 14. Przebieg prądu nieustalonego  $aT=1$ .

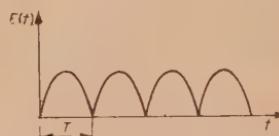
Przebieg tak obliczonego prądu nieustalonego przedstawiono na rys. 14.

### 5. WŁĄCZENIE SIŁY ELEKTROMOTORYCZNEJ O PRZEBIEGU SINUSOIDALNYM SPROSTOWANYM DO UKŁADU SZEREGOWEGO RC

W chwili  $t=0$  zostaje włączona do układu szeregowego  $RC$  (rys. 15) periodyczna siła elektromotoryczna  $E(t)$  o sprostowanym przebiegu sinusoidalnym, przedstawionym na rys. 16.

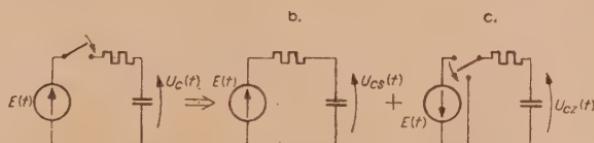


Rys. 15. Włączenie do układu szeregowego  $RC$  siły elektromotorycznej o przebiegu sinusoidalnym sprostowanym.



Rys. 16. Przebieg rozpatrywanej siły elektromotorycznej.

Obliczenie stanu nieustalonego sprowadza się w tym przypadku do obliczenia przebiegów w układach  $b$  i  $c$ , jak to pokazano poglądowo na rys. 17.



Rys. 17. Napięcie nieustalone na kondensatorze wywołane włączeniem siły elektromotorycznej w układzie  $a$ , można obliczyć jako sumę napięcia ustalonego w układzie  $b$  i napięcia zaburzeniowego wywołanego wyłączeniem siły elektromotorycznej w układzie  $c$ .

#### 5.1. Obliczanie stanu ustalonego

Siła elektromotoryczna  $E(t)$  jest funkcją periodczną o okresie  $T = \frac{\pi}{\omega}$  przy czym w przedziale  $0 < t < T$  przebieg tej funkcji określony jest wzorem

$$E(t) = E_m \sin \omega t.$$

Napięcie ustalone na kondensatorze  $U_{cs}(t)$  będzie zatem również funkcją periodczną o okresie  $T$ , przy czym przebieg tej funkcji w przedziale  $0 < t < T$  możemy łatwo znaleźć

$$U_{cs}(t) = -\frac{E_m}{Z\omega C} \left[ \cos(\omega t + \varphi) - \cos \varphi e^{-\frac{t}{RC}} \right] + U_c(0) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

$U_c(0)$  oznacza wartość napięcia ustalonego na kondensatorze na początku każdego okresu.  $U_c(0)$  możemy łatwo obliczyć korzystając z warunku

ciągłości określającej przebieg funkcji napięcia na kondensatorze, czyli w naszym przypadku z relacji

$$U_c(0) = U_c(T)$$

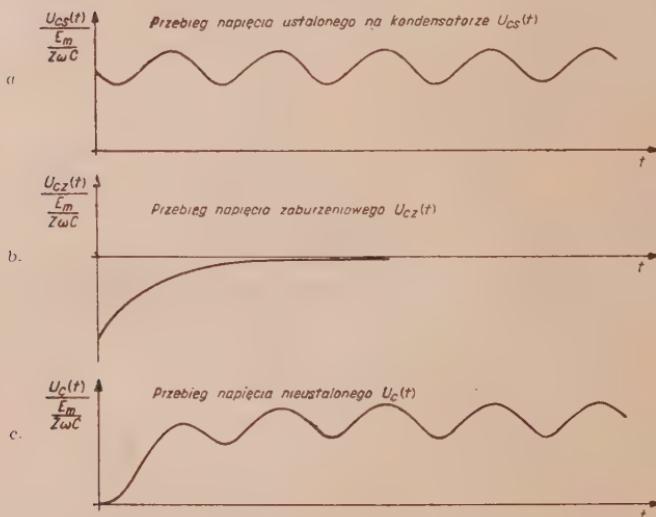
otrzymamy

$$U_c(0) = \frac{E_m}{Z\omega C} \cos \varphi \frac{1 + e^{-\frac{T}{RC}}}{1 - e^{-\frac{T}{RC}}}.$$

Po podstawieniu wartości  $U_c(0)$  do otrzymanego poprzednio wzoru na  $U_c(t)$  mamy ostatecznie

$$U_{cs}(t) = -\frac{E_m}{Z\omega C} \left[ \cos(\omega t + \varphi) - \cos \varphi \cdot \frac{2e^{-\frac{t}{RC}}}{1 - e^{-\frac{T}{RC}}} \right].$$

$$RC = \frac{T}{2}, \varphi = 32^\circ$$



Rys. 18. Przebiegi napięcia ustalonego, zaburzeniowego i nieustalonego na kondensatorze przy włączeniu na układ szeregowy  $RC$  napięcia sinusoidalnego sprostowanego.

Przebieg tej funkcji periodycznej o okresie  $T$ , określonej w przedziale  $0 < t < T$  powyższym wzorem, przedstawiono na rys. 18a.

## 5. 2. Napięcie zaburzeniowe

Napięcie zaburzeniowe na kondensatorze wywołane jest wyłączeniem w układzie, przedstawionym na rys. 17c, w chwili  $t=0$  siły elektromotorycznej  $E(t)$ . Wskutek tego wyłączenia zostaje przerwany stan ustalony,

który ona wymuszała, i występuje zaburzenie spowodowane wyładowaniem się kondensatora, na którym w chwili wyłączenia było napięcie  $U_c(0)$ . Napięcie zaburzeniowe jest zatem równe

$$U_{cz}(t) = U_c(0) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Wartość początkowa  $U_c(0)$  jest to wartość dla chwili  $t=0$  napięcia ustalonego na kondensatorze, wymuszanego przez identyczną siłę elektromotoryczną jak pracująca w układzie  $b$ , tylko o przeciwej kierunkowości. Można ją więc obliczyć wprost z poprzednio znalezionej stanu ustalonego, a mianowicie

$$U_{cz}(t) = -\frac{E_m}{Z\omega C} \cos \varphi \frac{1+e^{-\frac{T}{RC}}}{1-e^{-\frac{T}{RC}}} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Przebieg tego prądu przedstawiono na rys. 18b.

### 5.3. Napięcie nieustalone

Napięcie nieustalone jest sumą napięcia ustalonego i napięcia zaburzeniowego. W tym przypadku przebieg tego napięcia można przedstawić jako sumę periodycznej funkcji o okresie  $T$ , którą w przedziale  $0 < t < T$  można wyrazić wzorem

$$U_{cs}(t) = -\frac{E_m}{Z\omega C} \left[ \cos(\omega t + \varphi) - \cos \varphi \frac{2e^{-\frac{t}{RC}}}{1-e^{-\frac{T}{RC}}} \right]$$

oraz aperiodycznej funkcji

$$U_{cz}(t) = -\frac{E_m}{Z\omega C} \cos \varphi \frac{1+e^{-\frac{T}{RC}}}{1-e^{-\frac{T}{RC}}} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Przebieg tak obliczonego napięcia zaburzeniowego na kondensatorze przedstawiono na rys. 18c.

### 6. ZAKOŃCZENIE

W pracach z zakresu stanów nieustalonych często można spotkać zbyt formalne stosowanie dużego aparatu matematycznego i przeprowadzanie zmuśnych obliczeń w takich przypadkach, w których to nie tylko jest zbędne, ale wręcz komplikuje zagadnienie i prowadzi do wyników praktycznie mało przydatnych.

Praca niniejsza ma na celu:

1. przedstawienie zastosowania metody dwóch przeciwnych stanów ustalonych dla obliczania stanów nieustalonych w układach pobudzanych periodycznie,

2. przedstawienie obliczenia stanów ustalonych w układach pobudzanych periodycznie za pomocą metody analizy przebiegów w jednym okresie stanu ustalonego,
3. unaocznienie ogromnych korzyści jakie daje fizyczne, a nie formalno-matematyczne, ujęcie zagadnienia.

\*

W zakończeniu uważam za swój obowiązek złożyć serdeczne podziękowanie prof. drowi inż. Stanisławowi Fryzemu za wskazanie na konieczność fizycznej interpretacji poszczególnych członów funkcji określających przebiegi nieustalone, a w związku z tym na możliwość znalezienia prostszych metod rozwiązywania tych zagadnień.

#### WYKAZ LITERATURY

1. Osiowski J. — Stany nieustalone w układach pobudzanych ciągiem impulsów — Arch. Elektr. t. II, nr 1—2, 1953.
2. Węgrzyn S. — Przebiegi nieustalone w wielostopniowych wzmacniaczach oporowych o sprzężeniu pojemnościowym — Arch. Elektr. t. I, nr 2, 1952.

#### С. ВЕНГРЖИН

#### НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ В ПЕРИОДИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ СИСТЕМАХ

##### Резюме

Включение периодической электродвижущей силы в линейной электрической системе с нулевыми начальными условиями можно рассматривать как выключение одной из комплекса двух равных электродвижущих сил действующих в противоположных направлениях, как это показано на рис. 1. Если в системе  $Z$  нет других электродвижущих сил и если начальные условия этой системы — нулевые, то до включения электродвижущей силы  $E(t)$  напряжения на каждом из элементов системы и токи в каждом из них равны нулю. Это состояние можно рассматривать как сумму двух равных, но противоположно направленных стационарных состояний, вызванных двумя равными, но противоположно направленными электродвижущими силами.

Выключая одну из этих электродвижущих сил, мы прекращаем стационарное состояние, которого она была причиной и вызываем переходный процесс являющийся следствием разряда отдельных катушек и конденсаторов системы  $Z$ .

И так полное нестационарное состояние в линейной электрической системе вызванное включением любой периодической электродвижущей силы может быть представлено в виде суммы:

- а. стационарного состояния (обозначенного в настоящем труде индексом  $s$ ) вызванного включением этой электродвижущей силы,
- б. переходного процесса (обозначенного в настоящем труде индексом  $z$ ), вызванного выключением равной, но противоположно направленной электродвижущей силы, которая работала в данной системе в её стационарном состоянии до момента выключения.

На рис. 2 представлена система для случая включения генератора тока с бесконечно большим внутренним сопротивлением.

Проблему нестационарного режима возникающего при включении периодической электродвижущей силы в линейной системе можно поэтому свести к расчёту стационарного состояния и переходного процесса. Стационарное состояние мы расчитываем при помощи какого-либо метода теоретической электротехники, применяемого для расчёта стационарных состояний периодических процессов.

Расчёт же переходного процесса сводится в случае цепей с сосредоточенными постоянными — при применении операторного исчисления — к обратному преобразованию функции типа  $\frac{U_c(0)}{Z(p)}, \frac{pLJ(0)}{Z(p)}$  или же  $\frac{U_c(0)Y_1(p)}{Y_2(p)}, \frac{pLJ(0)Y_1(p)}{Y_2(p)}$  — т. е. рациональных алгебраических функций, что возможно при применении простых формул обратного преобразования.

Для примера рассмотрены по методу двух противоположных стационарных состояний: включение генератора тока в параллельной системе  $RLC$ ; включение пилообразной электродвижущей силы в последовательной системе  $RL$  и включение синусоидальной выпрямленной электродвижущей силы в последовательной системе  $RC$ .

В двух последних примерах расчёт стационарного состояния представлен при помощи указанного автором метода анализа процессов для одного периода стационарного состояния.

Из трёх представленных в настоящем труде примеров мы приводим в резюме второй пример, т. е. расчёт нестационарного процесса тока, возникающего при включении пилообразной электродвижущей силы в последовательной системе.

Пример: Включение пилообразной электродвижущей силы в последовательную систему  $RL$ .

В момент  $t=0$  в последовательную систему  $RL$  (рис. 9) включается периодическая пилообразная электродвижущая сила  $E(t)$ , представленная на рис. 10.

Электродвижущая сила  $E(t)$  является периодической функцией с периодом  $T$ , причём в интервале  $0 < t < T$  эта функция определяется формулой

$$E(t) = E_m \frac{t}{T}.$$

Так как электродвижущая сила является периодической функцией с периодом  $T$ , то и стационарный ток в рассматриваемом нами контуре будет также периодической функцией с периодом  $T$ , причём функция эта в интервале  $0 < t < T$  легко может быть найдена после обратного преобразования функции

$$\bar{J}_s(p) = \frac{\bar{E}(p)}{R + pL} + \frac{pLJ(0)}{R + pL}$$

где  $\bar{E}(p) = \frac{E_m}{pT}$  а  $J(0)$  обозначает значение стационарного тока в начале периода. После обратного преобразования мы получим:

$$J_s(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{t}{T} - \frac{1}{\alpha T} \left( 1 - e^{-\alpha t} \right) \right] + J(0) e^{-\alpha t}.$$

$J(0)$  легко определить, пользуясь условием непрерывности функции, определяющей так, текущий через катушку, или, в нашем случае, из соотношения

$$J_s(0) = J_s(T)$$

и мы получим

$$J(0) = \frac{E_m}{R} \left[ -\frac{1}{\alpha T} + \frac{1}{1 - e^{-\alpha T}} \right].$$

Подставляя значение  $J(0)$  в полученную раньше формулу для  $J_s(t)$  мы получим окончательно

$$J_s(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{t}{T} - \frac{1}{aT} + \frac{e^{-at}}{1 - e^{-aT}} \right].$$

Эта периодическая функция с периодом  $T$  определённая в интервале  $0 \leq t < \infty$  предыдущей формулой, представлена на рис. 12.

Переходный ток вызван выключением из системы рис. 11c в момент  $t=0$  эл. ктродвижущей силы  $E(t)$ . Вследствие этого выключения стационарное состояние к-торое она вынудила, прерывается и выступает возмущение, вызванное разрядом катушки, через которую текл. ток  $J(0)$  в момент выключения.

Переходный ток следовательно равен

$$J_z(t) = -J(0) e^{-at}.$$

Начальное значение  $J(0)$  является значением для момента  $t=0$  стационарного тока, вынуждаемого генератором, то-кдественным с генератором работающим в си-стеме  $b$ , но с обратным направлением и оно, следовательно, может быть непосред-ственно определено из найденного раньше значения стационарного состояния а именно

$$J_z(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{t}{aT} - \frac{1}{1 - e^{-aT}} \right] e^{-at}.$$

Этот ток возмущения представлен на рис. 13.

Нестационарный ток является суммой стационарного и возмущающего токов. В нашем случае нестационарный ток может быть представлен как сумма а. периодической функции с периодом  $T$ , которую на отрезке  $0 \leq t < T$  можно представить формулой

$$J_s(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{t}{T} - \frac{1}{aT} + \frac{e^{-at}}{1 - e^{-aT}} \right],$$

б. и апериодической функции

$$J_z(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{1}{aT} - \frac{1}{1 - e^{-aT}} \right] e^{-at}.$$

Рассчитанный таким образом нестационарный ток представлен на рис. 14.

S. WĘGRZYN

### TRANSIENTS IN PERIODICALLY SUPPLIED CIRCUITS

#### Summary

The application of a periodical e. m. f. to a linear circuit with zero initial conditions may be considered as an elimination of one of the two e. m. fs equal in magnitude but opposite in polarity, as illustrated in Fig. 1. Since there are no other e. m. fs in the circuit  $Z$  and since the initial conditions are/ zero the voltage across the elements of the circuit and all currents are zero before applying the e. m. f.  $E(t)$ . This state may be considered as a sum of two steady states equal in magnitude but opposite in polarity, caused by two e. m. fs of equal magnitude and opposite polarity. By switching off of one of them the enforced steady state is interrupted and a disturbance is caused by the discharging of all condensers and inductances involved.

The total transient in a linear electric circuit due to the switching on of any periodic e. m. f. may be regarded as the sum of

- a steady state (indexed  $s$ ) caused by the impressed e. m. f.,
- a disturbance (indexed  $z$ ) caused by the elimination of an e. m. f. equal in magnitude but opposite in polarity operating during the steady state before the switching off.

Fig. 2 illustrates a circuit for the case of switching on of a current generator with infinite internal impedance.

The problem of the transient due to an applied periodic e. m. f. to a linear circuit may be then reduced to the calculation of a steady state and a disturbance.

The steady state may be calculated by any one method used in theoretical electrical engineering, applied to the steady state.

The calculation of the disturbance may be performed, in the case of a circuit with lumped parameters, by using the operational method to find the inverse transformation of the functions

$$\frac{U_c(0)}{Z(p)}, \quad \frac{pLJ(0)}{Z(p)} \quad \text{or} \quad \frac{U_c(0)Y_1(p)}{Y_2(p)}, \quad \frac{pLJ(0) Y_1(p)}{Y_2(p)}$$

These functions are algebraic and rational which permits the applications of simple formulae for the inverse transformation.

As an example, this method of solution has been used in the case of application of a current generator to a circuit containing  $R L C$ , in parallel, the application of a saw-tooth e. m. f. to a circuit with  $R L$  in series and the application of a rectified sinusoidal e. m. f. to a circuit with  $R C$  in series. In the last two cases the computation of the steady state has been done by analyzing the equations for one period of the steady state function.

Of the three examples contained in the paper only the second one will be considered in this summary, i. e. the calculation of the transient current caused by applying a saw-tooth e. m. f. to a series circuit of  $R L$ .

**Example.** Application of a saw-tooth e. m. f. to a series circuit of  $R L$ .

A periodic saw-tooth e. m. f.  $E(t)$  has been applied to a series circuit of  $R L$  at  $t=0$  as illustrated in Fig. 10.

The e. m. f.  $E(t)$  is a periodic function of a period  $T$ . The function is defined within the  $0 < t < T$  by the expression

$$E(t) = E_m \frac{t}{T}.$$

Consequently the steady state current in the discussed circuit will also be a periodic function of the period  $T$ . It may be easily found by means of the inverse transformation of the function

$$J_s(p) = \frac{E(p)}{R + pL} + \frac{pLJ(0)}{R + pL}$$

where  $\bar{E}(p) = \frac{E_m}{pT}$ .

$J(0)$  represents the value of the steady state current at the beginning of the period. After the inverse transformation we obtain:

$$J_s(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{t}{T} - \frac{1}{\alpha T} (1 - e^{-\alpha t}) \right] + J(0) e^{-\alpha t}.$$

$J(0)$  may be easily evaluated by assuming that the function defining the current flowing in the coil is a continuous one.

In this case

$$J_s(0) = J_s(T)$$

hence

$$J(0) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{1}{aT} - \frac{1}{1 - e^{-aT}} \right].$$

After substituting  $J(0)$  into the foregoing expression for  $J_s(t)$ , we get

$$J_s(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{t}{T} - \frac{1}{aT} + \frac{e^{-at}}{1 - e^{-aT}} \right].$$

This periodic function of the period  $T$  defined by the above formula within the interval  $0 < t < T$  is illustrated in Fig. 12.

The disturbance current is due to switching off of the e. m. f.  $E(t)$  in the circuit given in Fig. 11c at  $t=0$ . As a result the steady state enforced by the e. m. f.  $E(t)$  is interrupted and a disturbance is caused by discharging the inductance in which the current  $J(0)$  was flowing at the moment of switching.

Hence the disturbance current is:

$$J_d(t) = -J(0) e^{-at}.$$

The initial value  $J(0)$  is a value of the steady state current at  $t=0$  enforced a generator identical with the one operating in the circuit c but of opposite polarity. Hence  $J(0)$  may be calculated from the previously found steady state, i.e.:

$$J_s(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{1}{aT} - \frac{1}{1 - e^{-aT}} \right] e^{-at}.$$

This disturbance current is illustrated in Fig. 13.

The transient current is the sum of the steady state current and disturbance current.

In this case the transient current may be expressed as a sum of the periodic function of the period  $T$  which is defined within the interval  $0 < t < T$  by the expression:

$$J_s(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{t}{T} - \frac{1}{aT} + \frac{e^{-at}}{1 - e^{-aT}} \right]$$

and the aperiodic function as follows:

$$J_d(t) = \frac{E_m}{R} \left[ \frac{1}{aT} - \frac{1}{1 - e^{-aT}} \right] e^{-at}.$$

The graph of this transient current is shown in Fig. 14.

621.373.011

J. GROSZKOWSKI

## rozzerzenie zasady równowagi mocy urojonej harmonicznych na układy o widmach ciągłych

Rękopis dostarczony 3. 5. 1954

**S t r e s z c z e n i e.** Zasada równowagi mocy urojonej harmonicznych, podana przez autora w odniesieniu do układów generacyjnych o przebiegach wyrażających się widmem prązkowym, może być rozszerzona na układy o przebiegach wyrażających się widmami ciągłymi; suma urojonych mocy harmonicznych zostaje tu zastąpiona odpowiednią całką urojonej mocy gęstości widmowej. Równanie uogólnionej zasady sprawdzono na przebiegu tłumionym.

Zasada równowagi mocy urojonej harmonicznych, słuszna dla stanu stalonego w układach generacyjnych, gdy występuje w nich widmo prązkowe harmonicznych [1], może być rozszerzona na układy generacyjne o drganiach wyrażających się widmami ciągłymi.

Jeśli w równoważnym obwodzie, w którym występuje jakiś przebieg niemny w czasie, na przykład przebieg oscylacyjny, znajduje się element oporowy rzeczywisty (a więc nie magazynujący energii), dla którego charakterystyka napięciowo-prądowa  $u=F(i)$  wyraża się linią "ciemką" (bezpetlową), to dla tego elementu musi być spełniony warunek

$$\oint idu = \oint udi = 0. \quad (1)$$

Dla drgań wyrażających się widmem prązkowym harmonicznych prąwych  $n_k \mid_{k=1}^{\infty}$  lub napięciowych  $m_k \mid_{k=1}^{\infty}$  mieliśmy zależności:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{Im} \{Z_k\} n_k^2 = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{Z_k} \right\} m_k^2 = 0, \quad (3)$$

gdzie  $Z_k$  jest impedancją dla częstotliwości  $k\omega$  układu, do którego załączony jest element rzeczywisty o charakterystyce wyrażają-

cej się linią cienką;  $\text{Im} \{ \}$  oznacza składową urojoną wyrażenia w klamrce,  $k$  jest rzędem harmonicznej.

Z zależności (2) lub (3) może być określona częstotliwość układu.

W przypadku gdy drganie wyraża się widmem ciągłym o rozkładzie danym przez gęstość widmową  $\Phi(\Omega)$ , można uważać, że rzędowi  $k$  harmonicznej odpowiada iloraz  $\Omega : \omega$ , tj.

$$k \rightarrow \frac{\Omega}{\omega}$$

a zawartości, na przykład harmonicznej prądowej  $n_k$ , odpowiada iloraz gęstości widmowych  $\Phi(\Omega) : \Phi(\omega)$ , tj.

$$n_k \rightarrow \frac{\Phi^2(\Omega)}{\Phi^2(\omega)},$$

przy czym  $\omega$  jest tu częstotliwością odpowiadającą podstawowej częstotliwości drgania.

Impedancia  $Z_k$  dla częstotliwości harmonicznej  $k\omega$  przejdzie w impedancję dla częstotliwości  $\Omega$ , tzn.

$$Z_k \rightarrow Z_\Omega.$$

Wreszcie suma dla poszczególnych harmonicznych od  $k=1$  do  $k=\infty$  przejdzie w całkę od 0 do  $\infty$ , czyli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dots \rightarrow \int_0^{\infty} \dots d\Omega.$$

W ten sposób warunek równowagi mocy urojonej, dany równaniem (2), w przypadku wiadma ciągłego przybiera postać

$$\int_0^{\infty} \frac{\Omega}{\omega} \text{Im} \{ Z_\Omega \} \frac{\Phi^2(\Omega)}{\Phi^2(\omega)} d\Omega = 0,$$

która sprowadza się do równania

$$\int_0^{\infty} \Omega \text{Im} \{ Z_\Omega \} \Phi^2(\Omega) d\Omega = 0. \quad (4)$$

Matematyczne uzasadnienie tego równania podano w dodatku.

Wyniki powyższych rozważań mogą być zastosowane na przykład do sprawdzenia wyrażenia na częstotliwość drgania tłumionego o równaniu

$$i = I e^{-at} \sin \omega t \quad (5)$$

zchodzącego w układzie oscylacyjnym, składającym się na przykład z szeregowo połączonych: indukcyjności  $L$ , pojemności  $C$  i oporu  $R$ . W równaniu tym

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

est współczynnikiem tłumienia,  $\omega$  zaś jest częstotliwością drgania (określającą na przykład momenty przechodzenia chwilowej wartości prądu przez zero).

Ponieważ charakterystyka napięciowo-prądowa oporu  $R$

$$u = F(i)$$

wyraża się linią cienką, przeto w odniesieniu do zacisków tego oporu musi być spełniony warunek (1).

Dla drgania tłumionego o równaniu (5) gęstość widmowa dana jest przez

$$\Phi(\Omega) = \frac{I}{\pi} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2 + a^2)^2 - 2(\omega^2 - a^2)\Omega^2 + \Omega^4}}.$$

Dla częstotliwości  $\Omega$  składowa urojona impedancji obwodu będzie

$$\operatorname{Im}\{Z_\Omega\} = \Omega L - \frac{1}{\Omega C} = \frac{1}{\Omega C} \left( \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right),$$

jeśli wprowadzimy dla częstotliwości rezonansowej oznaczenie

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Warunek równowagi mocy urojonej widma ciągłego przyjmuje tu postać

$$\int_0^\infty \frac{\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} - 1}{(\omega^2 + a^2) - 2(\omega^2 - a^2)\Omega^2 + \Omega^4} d\Omega = 0.$$

To ostatnie równanie można napisać jak następuje:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \int_0^\infty \frac{\Omega^2 d\Omega}{(\omega^2 + a^2)^2 - 2(\omega^2 - a^2)\Omega^2 + \Omega^4} - \int_0^\infty \frac{d\Omega}{(\omega^2 + a^2) - 2(\omega^2 - a^2)\Omega^2 + \Omega^4} = 0. \quad (6)$$

Oznaczając

$$A = \int_0^\infty \frac{dx}{p^2 + 2qx^2 + x^4}, \quad (7)$$

$$B = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{p^2 + 2qx^2 + x^4}, \quad (8)$$

gdzie

$$x = \Omega, \quad p = (\omega^2 + a^2), \quad q = -(\omega^2 - a^2),$$

przy czym

$$q^2 - p^2 < 0,$$

równanie (6) przedstawimy jako

$$\frac{1}{\omega_0^2} B - A = 0. \quad (9)$$

Rozwiązańca całek (7) i (8) są następujące:

$$A = \frac{1}{4p \sqrt{p} \sin \alpha} \left\{ \sin \frac{\alpha}{2} \left| \ln \frac{x^2 + 2\sqrt{p}x \cos \frac{\alpha}{2} + p}{x^2 - 2\sqrt{p}x \cos \frac{\alpha}{2} + p} \right|_0^\infty + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left| \operatorname{arctg} \frac{x^2 - p}{2\sqrt{p}x \sin \frac{\alpha}{2}} \right|_0^\infty \right\} \quad (10)$$

gdzie  $\cos \alpha = -\frac{q}{p}$ ,

$$B = \frac{1}{4\sqrt{2(p-q)}} \left[ \ln \frac{x^2 - 2\sqrt{p-q}x + p}{x^2 + 2\sqrt{p-q}x + p} \right]_0^\infty + \\ + \frac{1}{2\sqrt{2(p-q)}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{2x - \sqrt{2(p-q)}}{\sqrt{2(p+q)}} + \operatorname{arctg} \frac{2x + \sqrt{2(p-q)}}{\sqrt{2(p+q)}} \right]_0^\infty. \quad (11)$$

W wyrażeniach (10) i (11) wyrazy z  $\ln$  dla  $x = \infty$  i  $x = 0$  przyjmują wartości równe zeru; wyrażenie z  $\operatorname{arctg}$  w równaniu (10) daje  $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ , natomiast w równaniu (11) mamy

$$\operatorname{arctg} \left( -\sqrt{\frac{p-q}{p+q}} \right) + \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{p-q}{p+q}} \right) = 0.$$

Zatem

$$A = \frac{\pi}{4a(\omega_0^2 + \alpha^2)}, \quad (12)$$

$$B = \frac{\pi}{4a}, \quad (13)$$

Z podstawienia (12) i (13) do (7) wynika

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2},$$

czyli

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha^2. \quad (14)$$

Otrzymane wyrażenie (14) na częstotliwość  $\omega$  drgań jest znane i zgodne z wyrażeniem otrzymanym klasyczną metodą badania drgań w układzie oscylacyjnym tłumionym.

Dla widma ciągłego interesujący jest sens fizyczny równowagi mocy urojonej w elementach magazynujących energię. O ile w przypadku widma prązkowego ([2] str. 172) harmoniczne, mające częstotliwości wyższe od podstawowej, obniżały w obwodzie  $LCR$  częstotliwość podstawową drgań  $\omega$ , o tyle w przypadku widma ciągłego, część widma o częstotliwości  $\Omega < \omega$  działa podwyższająco i w pewnym stopniu kompensuje działanie obniżające części widma o częstotliwości  $\Omega > \omega$ .

W zakończeniu pragnąbym wyrazić wdzięczność doc. dr L. Łukaszewicowi za zredagowanie dodatku.

Zakład Radiotechniki  
Politechniki Warszawskiej

#### WYKAZ LITERATURY

1. Groszkowski J. — The interdependence of frequency variation and harmonic content, and the problem of constant frequency oscillators — Proc. I. R. E., 21, 1933, 958.
2. Groszkowski J. — Generacja i stabilizacja częstotliwości — PWT, Warszawa, 1950.
3. Грошковский Я. — Генерирование высокочастотных колебаний и стабилизация частоты — И. Л., Москва, 1953.

#### Dodatek

##### MATEMATYCZNE UZASADNIENIE RÓWNANIA (4)

Założymy, że:

1. funkcje  $i(t)$  oraz  $u(t)$  w każdym skończonym przedziale mają co najwyżej skończoną liczbę ekstremów i punktów nieciągłości,
2. całki

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u'(t)| dt \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |i(t)| dt$$

są zbieżne oraz

3. są spełnione warunki

$$u_{(+\infty)} = u_{(-\infty)} = i(+\infty) = i(-\infty) = 0. \quad (1)$$

Jeśli ponadto  $i(t)$  jest jednoznaczna i ciągłą funkcją  $u(t)$

$$i = f(u),$$

to istnieje związek

$$\int_0^{\infty} \Omega U(\Omega) I(\Omega) \sin \varphi(\Omega) d\Omega = 0, \quad (2)$$

gdzie

$$U(\Omega) \sin \alpha(\Omega) = U_1(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos \Omega t dt, \quad (3)$$

$$U(\Omega) \cos \alpha(\Omega) = U_2(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin \Omega t dt, \quad (4)$$

$$I(\Omega) \sin \beta(\Omega) = I_1(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i(t) \cos \Omega t dt, \quad (5)$$

$$I(\Omega) \cos \beta(\Omega) = I_2(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i(t) \sin \Omega t dt \quad (6)$$

oraz

$$\varphi(\Omega) = \beta(\Omega) - \alpha(\Omega). \quad (7)$$

Istotnie, na podstawie zależności (1) mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} i du = \int_{-\infty}^{\infty} [f(u(t)) u'(t)] dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = \int_0^0 f(u) du = 0. \quad (8)$$

Z twierdzenia Fouriera oraz równań (3) i (4) wynika

$$U(t) = \int_0^{\infty} U(\Omega) \sin [\Omega t + \alpha(\Omega)] d\Omega, \quad (9)$$

$$U'(t) = \int_0^{\infty} \Omega U(\Omega) \cos [\Omega t + \alpha(\Omega)] d\Omega. \quad (10)$$

Podstawiając (7) do (6) otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} i(t) \left\{ \int_0^{\infty} \Omega U(\Omega) \cos [\Omega t + \alpha(\Omega)] d\Omega \right\} dt = 0. \quad (11)$$

Zmieniając porządek całkowania dochodzimy ostatecznie do wyrażenia

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \Omega U(\Omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} i(t) \cos [\Omega t + \alpha(\Omega)] dt \right\} d\Omega = \\ & = \int_0^{\infty} \Omega U(\Omega) \{ I_1(\Omega) \cos \alpha(\Omega) - I_2(\Omega) \sin \alpha(\Omega) \} d\Omega = \\ & = \int_0^{\infty} \Omega U(\Omega) I(\Omega) \sin [\beta(\Omega) - \alpha(\Omega)] d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Uwzględnienie (5) w (8) daje wzór (2).

Я. ГРОШКОВСКИ

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРИНЦИПА БАЛАНСА РЕАКТИВНОЙ МОЩНОСТИ ГАРМОНИК НА СИСТЕМЫ СО СПЛОШНЫМИ СПЕКТРАМИ

## Резюме

Принцип баланса реактивной мощности гармоник поданный автором для генерационных систем с колебаниями выраженным линейчатым спектром гармоник [1] может быть распространен на системы с колебаниями со сплошным спектром.

В случае линейчатого спектра (нпр. для гармоник тока с содержанием  $n_k$ ) это условие принимало вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{Im} \{Z_k\} n_k^2 = 0, \quad (2)$$

где  $k$  является индексом гармоники,  $\operatorname{Im} \{Z_k\}$  — реактивной составляющей импеданса  $Z_k$  для частоты  $k\omega$ .

В случае колебания выраженного сплошным спектром, с распределением заданным спектральной плотностью  $\Phi(\Omega)$ , мы имеем следующие зависимости:

$$k \rightarrow \frac{\Omega}{\omega}, \quad n_k \rightarrow \frac{\Phi(\Omega)}{\Phi(\omega)}, \quad Z_k \rightarrow Z_{\Omega}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \dots \rightarrow \int_0^{\infty} \dots d\Omega$$

$\omega$  является здесь частотой, соответствующей частоте колебаний.

Таким образом условие баланса реактивной мощности гармоник принимает здесь вид

$$\int_0^{\infty} \Omega \operatorname{Im} \{Z_{\Omega}\} \Phi^2(\Omega) d\Omega = 0. \quad (4)$$

Условие (4) можно проверить нпр. для затухающего колебания данного уравнением

$$i = I e^{-at} \sin \omega t$$

имеющем место в контуре  $LCR$  (для которого  $a = R/2L$ )

Плотность спектра такого колебания дана выражением

$$\Phi(\Omega) = \frac{I}{\pi} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2 + a^2)^2 - 2(\omega^2 - a^2)\Omega^2 + \Omega^4}}.$$

Для контура  $LCR$  мы находим

$$\operatorname{Im} \{Z_{\Omega}\} = \Omega L - \frac{1}{\Omega C} = \frac{1}{\Omega C} \left( \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right)$$

$$\text{где } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Подстановка соответствующих выражений в (4) приводит к уравнению

$$\frac{1}{\omega_0^2} \int_0^{\infty} \frac{\Omega^2 d\Omega}{(\omega^2 + a^2) - 2(\omega^2 - a^2)\Omega^2 + \Omega^4} - \int_0^{\infty} \frac{d\Omega}{(\omega^2 + a^2) - 2(\omega^2 - a)\Omega^2 + \Omega^4} = 0. \quad (6)$$

из которого получается известная зависимость частоты затухающего колебательного колебания:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - a. \quad (14)$$

Для сплошного спектра интересен физический смысл баланса реактивной мощности гармоник в накопляющих энергию элементах. В то время как в случае линейчатого спектра ([3] стр. 149) гармоники с частотой выше чем основная понижали в контуре  $LCR$  основную частоту  $\omega$ , — то в случае сплошного спектра, часть спектра с частотой  $\Omega < \omega$  действует повышающим образом и в некоторой степени компенсирует понижающее влияние части спектра с частотой  $\Omega > \omega$ .

В приложении приведено математическое обоснование формулы (4).

J. GROSZKOWSKI

THE EXTENTION OF THE PRINCIPLE OF THE REACTIVE POWER BALANCE OF HARMONICS TO CIRCUITS WITH A CONTINUOUS FREQUENCY SPECTRUM

Summary

The author's principle of the balance of the reactive power of harmonics valid in generating circuits having a line harmonic frequency spectrum [1] can be extended to circuits with a continuous frequency spectrum.

In the case of a line harmonic frequency spectrum the condition could be expressed (e. g. for an amount  $n_k$  of current harmonics) by:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{Im} \{Z_k\} n_k^2 = 0. \quad (2)$$

where  $k$  — the order of harmonic.

$\operatorname{Im} \{Z_k\}$  — the reactive (imaginary) part of the impedance  $Z_k$  for an angular frequency  $k\omega$ .

For a continuous frequency spectrum with a spectral density of  $\Phi(\Omega)$  the following relations may be written

$$k \rightarrow \frac{\Omega}{\omega}; \quad n_k \rightarrow \frac{\Phi(\Omega)}{\Phi(\omega)}; \quad Z_k \rightarrow Z_{\Omega}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \dots \rightarrow \int_0^{\infty} \dots d\Omega,$$

where  $\omega$  — the frequency of oscillations.

Consequently the condition of the reactive power balance is expressed by the following equation

$$\int_0^{\infty} \Omega \operatorname{Im} \{Z_{\Omega}\} \Phi^2(\Omega) d\Omega = 0. \quad (4)$$

The above formula (4) may be proved for example in the case of the damped oscillation existing in a  $LCR$  circuit:

$$i = I e^{-at} \sin \omega t \quad \left( a = \frac{R}{2L} \right).$$

The spectrum density is given by

$$\Phi(\Omega) = \frac{I}{\pi} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2 + a^2)^2 - 2(\omega^2 - a^2) \Omega^2 + \Omega^4}}.$$

For the  $LCR$  circuit there may be found

$$\operatorname{Im} \{Z_k\} = \frac{1}{\Omega C} \left( \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right),$$

where

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

The substitution of proper expressions into (4) leads to the equation

$$\frac{1}{\omega_0^2} \int_0^\infty \frac{\Omega^2 d\Omega}{(\omega^2 + a^2)^2 - 2(\omega^2 - a^2) \Omega^2 + \Omega^4} - \int_0^\infty \frac{d\Omega}{(\omega^2 + a^2)^2 - 2(\omega^2 - a^2) \Omega^2 + \Omega^4} = 0. \quad (6)$$

Hence we get the well known formula determining the frequency of a damped oscillation

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2. \quad (14)$$

In the case of a continuous frequency spectrum it may be interesting to analyze the physical meaning of the reactive power balance occurring in the energy storing elements. Whereas in a line harmonic frequency spectrum ([2], p. 172) the harmonics, whose frequencies are higher than the fundamental one, cause a decrease of the fundamental frequency  $\omega$  of oscillation in  $LCR$  circuits, in a continuous frequency spectrum the lower part of the frequency spectrum  $\Omega < \omega$  causes an increase of the fundamental frequency of oscillations and, in a certain degree, compensates the decreasing action of the higher part  $\Omega > \omega$ .

The mathematical proof of formula (4) has been given in the appendix.



621.313.322.014.33

P. NOWACKI

Obliczanie składowych prądu nieustalonego  
 generatora synchronicznego jawnobiegunowego  
 przy nagłej zmianie oporności obciążenia  
 z uwzględnieniem obciążenia przedzwarcioowego

Rękopis dostarczono 3.5.1954

**S**treszczenie. W pracy niniejszej podano nowy sposób analitycznego i graficznego obliczenia składowych prądu zwarcioowego generatora synchronicznego jawnobiegunowego. Na podstawie analizy wykresu wektorowego generatora dla stanu obciążenia przed zwarciem oraz przy zastosowaniu prawa bezwładności magnetycznej skojarzonych obwodów magnetycznych wynika prosty sposób obliczania składowych: okresowej pierwszej i drugiej harmonicznej oraz składowej bezokresowej. Interpretacja ta prowadzi szybko i w sposób przystępny do równań Parka-Goriewa.

Nowy sposób polega na ustaleniu wektora napięcia przedzwarcioowego w miejscu zwarcia i obrót wektora SEM-nej przejściowej względnie przejściowej wstępnej w przypadku zwarcia na zaciskach generatora. Dodatkowo rozważono przypadek ogólny, w którym założono nagłą zmianę oporności obciążenia i podano wzory ogólne dla całkowitego prądu i jego składowych: pierwszej harmonicznej, drugiej harmonicznej oraz bezokresowej. Wykazano prostą zależność pomiędzy geometryczną stratą napięcia, która zachodzi przy nagłej zmianie oporności obciążenia, a składową bezokresową i drugą harmoniczną. Wyprowadzone wzory objaśniono przykładem oraz wykresami wektorowymi.

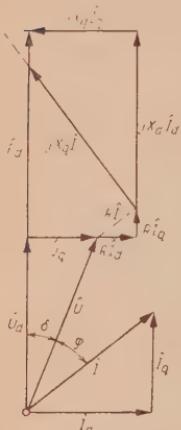
1. WYKRES WEKTOROWY GENERATORA SYNCHRONICZNEGO  
 DLA OBCIĄŻENIA PRZEDZWARCIOWEGO

Znany wykres wektorowy generatora synchronicznego jawnobiegunowego przedstawiono na rys. 1, przy czym należy przypomnieć, że w praktyce dane są:

- $\hat{U}$  — napięcie na zaciskach,
- $\hat{J}$  — prąd w stojanie,
- $\varphi$  — kąt fazowy,
- $J_f$  — prąd wzbudzenia.

Zakładamy, że obwody magnetyczne maszyny nie są nasycone, wówczas charakterystykę biegu jałowego maszyny można przedstawić w formie równania:

$$E_d = k_f \cdot J_f, \quad (1)$$



Rys. 1. Wykres wektorowy generatora synchronicznego jawnobiegunowego.

oraz

$$\hat{I}_d = \frac{-jX_q \cdot \hat{E}_d + jX_q \hat{U}_d - R \hat{U}_d}{R^2 + X_d X_q} \quad (4)$$

Calkowity prąd uogólniony wynosi:

$$\hat{I} = \hat{I}_d + \hat{I}_q = \frac{(R - jX_q) \hat{E}_d - (R - jX_q) \hat{U}_d - (R - jX_d) \hat{U}_q}{R^2 + X_d X_q} \quad (6)$$

Podstawiając do równania (6) wartości:

$$\begin{aligned} \hat{U} &= U, \\ \hat{U}_d &= U \cos \delta \cdot e^{j\delta} = U \frac{e^{2j\delta} + 1}{2}, \\ \hat{U}_q &= U \sin \delta \cdot e^{j\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right)} = -U \frac{e^{2j\delta} - 1}{2}, \\ \hat{E}_d &= E_d e^{j\delta}, \end{aligned}$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \frac{(R - jX_q) E_d \cdot e^{j\delta} - j(X_d - X_q) U \cdot e^{2j\delta}}{R^2 + X_d X_q} - \frac{j(X_d - X_q) U \cdot e^{2j\delta}}{2(R^2 + X_d X_q)} \\ &\quad - \frac{[2R - j(X_d + X_q)] \cdot U}{2(R^2 + X_d X_q)} \end{aligned} \quad (7)$$

W przypadku, gdy oporność czynna  $R$  jednej fazy uzwojenia stojana jest mała w porównaniu z opornościami biernymi  $X_d$  i  $X_q$ , można pominąć  $R$  we wzorze (7); wówczas wzór ten upraszcza się do postaci

$$\hat{I} = -j \frac{E_d \cdot e^{j\delta}}{X_d} - \frac{jUe^{2j\delta}}{2 \frac{X_d X_q}{X_d + X_q}} + \frac{jU}{2 \frac{X_d X_q}{X_d + X_q}} \quad (8)$$

$$\hat{I} = -j \frac{E_d \cdot e^{j\delta}}{X_d} - j \frac{Ue^{2j\delta}}{X_{2h}} + j \frac{U}{X_2}, \quad (9)$$

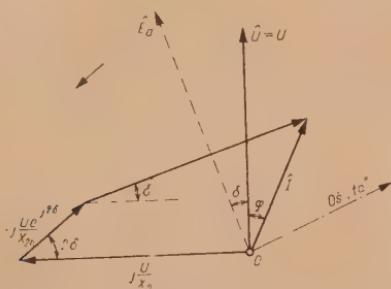
ub

gdzie

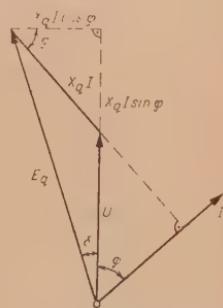
$$X_{2h} = 2 \frac{X_d X_q}{X_d - X_q}, \quad X_2 = 2 \frac{X_d X_q}{X_d + X_q}. \quad (10) \quad (11)$$

Równanie (9) wyraża zależność prądu uogólnionego w stojanie przy danym prądzie wzbudzenia, przedstawionym przez SEM-ną synchroniczną  $E_d$ , oraz przy danym napięciu na zaciskach generatora  $U$  w zależności od kąta rozchyłu  $\delta$  pomiędzy wektorem  $\hat{E}_d$  i wektorem  $\hat{U}$ . Oporność  $X_{2h}$  (wzór 10), nazwana dalej opornością drugiej harmonicznej, zależy od różnicy oporności (biernej) synchronicznej w osi podłużnej  $X_d$  i oporności (biernej) synchronicznej w osi poprzecznej  $X_q$ . Oporność  $X_2$  (wzór 10) nazwano dalej opornością dla składowej przeciwniej w stanie ustalonym. Jak widać ze wzoru (11) oporność  $X_2$  jest średnią harmoniczną oporności  $X_d$  i  $X_q$ , jest to przeciętna oporność, jaką przedstawia uzwojenie stojana przy zasilaniu stojana prądem zmiennym trójfazowym przy obrotach prawie synchronicznych i przy niewzbudzonym uzwojeniu wirnika. Składowa pierwsza prądu  $\hat{I}$  we wzorze (9) jest jedyną składową zależną od wzbudzenia, składowa druga i trzecia zależy tylko od napięcia na zaciskach oraz od parametrów  $X_d$  i  $X_q$ .

Na rys. 2 przedstawiono graficznie równanie (9).



Rys. 2. Wykres ruchowy generatora jawnobiegunowego.



Rys. 3. Wyznaczenie kąta rozchyłu  $\delta$ .

Na podstawie rys. 3 można wyznaczyć tangens kąta rozchyłu  $\delta$  z równania

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{X_q \cdot I \cdot \cos \varphi}{U + X_q \cdot I \cdot \sin \varphi}. \quad (12)$$

Rys. 2 wykorzystuje się do dyskusji miejsca geometrycznego wektora prądu  $\hat{I}$  w zależności od kąta  $\delta$  przy stałym wzbudzeniu ( $E_d = \text{const.}$ ). Jak wiadomo, uzyskuje się wówczas znany z teorii maszyny synchronicznej slimak Pascala [9].

Chcąc otrzymać wartości chwilowe napięcia  $\hat{U}$  i prądu  $\hat{I}$  na rys. 2 należałoby wprowadzić trzy osie czasowe obrócone względem siebie o kąty elektryczne  $\frac{2\pi}{3}$  i rzutować wektory  $\hat{U}$  i  $\hat{I}$  na osie czasowe fazy  $a$ ,  $b$  oraz  $c$ . Na rys. 2 dla przejrzystości oznaczono tylko oś  $t_a$  fazy  $a$ . Wartości chwilowe  $u_t$  i  $i_t$  otrzymamy obracając na rys. 2 wszystkie wektory wykresu i ustalając osie czasowe  $t_a$ ,  $t_b$ ,  $t_c$ , lub obracając osie czasowe zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara, a wszystkie wektory wykresu ustalając jako nieruchome.

## 2. USTALENIE ANALITYCZNE WARUNKÓW ZWARCIOWYCH OBWODÓW ZAWIERAJĄCYCH OPORNOŚCI INDUKCYJNE

Układ zastępczy prostego obwodu, zawierającego oporności czynne i bierne indukcyjne, podano na rys. 4, gdzie:

$E$  — SEM-na źródła.

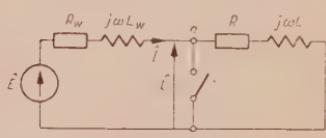
$R_w$  — oporność czynna źródła zasilania,

$j\omega L_w$  — „ indukcyjna źródła zasilania,

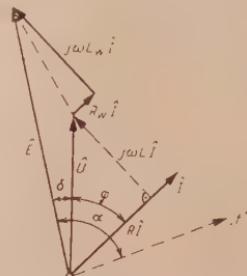
$R$  — „ czynna odbioru,

$j\omega L$  — „ bierna odbioru,

$\hat{U}$  — napięcie na zaciskach odbioru.



Rys. 4. Układ zastępczy prostego obwodu elektrycznego z indukcyjnymi opornościami czynnymi i biernymi.



Rys. 5. Wykres wektorowy napięć dla układu z rysunku 4.

Rysunek 5 podaje wykres wektorowy napięć dla źródła obciążonego opornością  $(R_w + j\omega L_w)$ .

Oznaczenia kątów są następujące:

$\varphi$  — kąt fazowy pomiędzy  $\hat{U}$  oraz  $\hat{I}$ , kąt fazowy obciążenia.

$\delta$  — „ rozchyłu wektorów napięć  $\hat{E}$  oraz  $\hat{U}$ ,

$\alpha$  — „ fazowy SEM-nej  $\hat{E}$  względem stałej osi czasu  $t$ .

Założymy teraz, że nagle w obwodzie rozważanym występuje zwarcie a zaciskach  $a-b$ , symbolizowane na rys. 4 zamknięciem wyłącznika  $S$ . Jak wiadomo z teorii stanów nieustalonych, w obwodzie wystąpi wówczas rząd zwarciovy, posiadający na ogół dwie składowe: kresową oraz bezokresową, czyli aperiodyczną. W rozważanym przypadku składowe te można łatwo obliczyć na podstawie prawa bezwładności magnetycznej, które rzeka, że w obwodach zawierających oporności indukcyjne pola magnetyczne nie mogą nagle zmienić się przy agłych zmianach parametru obwodu. Dla naszego przypadku wynika, że wartość chwilowa prądu  $i$  w chwili  $t=0_-$ , tj. w chwili bezpośrednio przed zamknięciem wyłącznika  $S$  musi się równać wartości chwilowej prądu zwarcioowego  $\hat{I}_z$  (rys. 6) w chwili  $t=0_-$ , tj. w chwili bezpośrednio po zamknięciu wyłącznika  $S$ .

Z drugiej strony wiadomo, że prąd zwarciovy  $i_z$  posiada bezpośrednio po zamknięciu wyłącznika  $S$  dwie składowe: okresową  $i_s$  oraz bezokresową  $i_a$ . Analityczne warunki zwarciovy dla rozważanego przypadku rzmią zatem

$$i_{0-} = i_{zo+}, \quad (13)$$

$$i_{zo+} = i_{so+} + i_{ao+}, \quad (14)$$

gdzie

$i_{0-}$  — wartość chwilowa prądu na chwilę przed zwarciem,

$i_{zo-}$  — wartość chwilowa całkowitego prądu zwarcioowego na chwilę po zwarciu,

$i_{so-}$  — wartość chwilowa składowej okresowej prądu zwarcioowego na chwilę po zwarciu,

$i_{ao-}$  — wartość chwilowa składowej aperiodycznej prądu zwarcioowego na chwilę po zwarciu.

Na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa z rys. 6 wynika następujące równanie różniczkowe

$$\hat{E}_{(t)} = R_w \cdot \hat{I}_{z(t)} + L_w \frac{d}{dt} (\hat{I}_{z(t)}). \quad (15)$$

W równaniu (15) użyto formy symbolicznej prądu  $i_z$  oraz SEM-nej  $E$ .

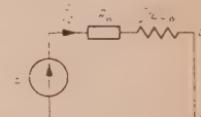
Stosując zasady rachunku operatorowego równanie (15) otrzymamy w formie przekształconej:

$$\hat{E}_{(s)} = (R_w + sL_w) \hat{I}_{z(s)} - L_w \hat{I}_{z(0-)}, \quad (16)$$

wstawiając dla

$$\hat{E}_{(t)} = E_m e^{j(\omega t + \alpha)}$$

$$\hat{E}_{(s)} = \mathcal{L}(\hat{E}_{(t)}) = \frac{E_m e^{j\alpha}}{(s - j\omega)}, \quad (17)$$



Rys. 6. Układ zastępczy prostego obwodu elektrycznego z rys. 4 po zamknięciu wyłącznika  $S$ .

$$\hat{I}_{zo-} = \hat{I}_{zo+} = \frac{E_m e^{j(a-\varphi_w)}}{Z_w} - \frac{U_m}{Z_w} e^{j(a-\delta-\varphi_w)}, \quad (18)$$

gdzie

$$Z_w = [R_w^2 + (\omega L_w)^2]^{1/2} \quad (19)$$

oraz

$$\operatorname{tg} \varphi_w = \frac{\omega L_w}{R_w} \quad (20)$$

otrzymamy

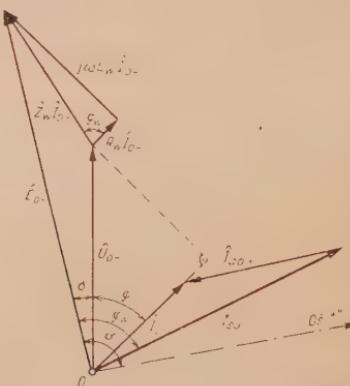
$$\hat{I}_{z(s)} = \frac{E_m e^{ja}}{L_w(s-j\omega) \left( s + \frac{R_w}{L_w} \right)} + \frac{E_m e^{j(a-\varphi_w)}}{Z_w \left( s + \frac{R_w}{Z_w} \right)} - \frac{U_m e^{j(a-\delta-\varphi_w)}}{Z_w \left( s + \frac{R_w}{L_w} \right)} \quad (21)$$

Równanie (21) po retransformacji brzmi:

$$\hat{I}_{z(t)} = \frac{E_m \cdot e^{j(a-\varphi_w - \omega t)}}{Z_w} - \frac{U_m}{Z_w} \cdot e^{j(a-\delta-\varphi_w)} e^{-\frac{R_w}{L_w} t}. \quad (22)$$

Wartość chwilowa prądu zwarciowego w dowolnej chwili po nastaniu zwarcia wyniesie:

$$i_{z(t)} = \operatorname{Re}(\hat{I}_{z(t)}) = \frac{E_m}{Z_w} \cos(\omega t + a - \varphi_w) - \frac{U_m}{Z_w} \cos(a - \delta - \varphi_w) e^{-\frac{R_w}{L_w} t}. \quad (23a)$$



Rys. 7. Wykres wektorowy napięć i prądów układu z rys. 4 dla warunków przedzwarciowych i zwarciowych dla chwili  $t=0-$  i  $t=0+$ .

Rysunek 7 przedstawia wykres wektorowy napięć i prądów dla warunków przedzwarciowych i zwarciowych dla chwili  $t=0-$  oraz  $t=0+$ .

Prąd przedzwarcioowy  $\hat{I}_{o-}$  otrzymamy z trójkąta napięć  $\hat{E}_o$ ,  $\hat{Z}_w$ ,  $\hat{I}_{o-}$ ,  $\hat{U}_{o-}$  na podstawie równania

$$\hat{E}_{o-} = \hat{U}_{o-} + \hat{Z}_w \cdot \hat{I}_{o-},$$

gdzie

$$\hat{E}_{o-} = \hat{E}_m e^{j\alpha},$$

$$\hat{U}_{o-} = U_m e^{j(\alpha - \delta)},$$

$$\hat{Z}_w = Z_w \cdot e^{j\varphi_w},$$

stąd wynika

$$\hat{I}_{o-} = \frac{\hat{E}_{o-} - \hat{U}_{o-}}{\hat{Z}_w},$$

czyli

$$\hat{I}_{o-} = \frac{E_m e^{j(\alpha - \varphi_w)}}{Z_w} - \frac{U_m e^{j(\alpha - \delta - \varphi_w)}}{Z_w}. \quad (18)$$

Prąd zwarcioowy  $\hat{I}_{zo+}$  w chwili  $t=0$  po nastaniu zwarcia wynosi w myśl równania (22) dla  $t=0$

$$\hat{I}_{zo+} = \frac{E_m e^{j(\alpha - \varphi_w)}}{Z_w} - \frac{U_m e^{j(\alpha - \delta - \varphi_w)}}{Z_w}. \quad (23b)$$

Porównując równania (18) i (23b) widać, że

$$\hat{I}_{o-} = \hat{I}_{zo+}. \quad (24)$$

Warunek (24) odpowiada warunkowi (13) dla zgodności wartości chwilowych prądu, jednakże warunek (24) jest ogólniejszy aniżeli warunek (13), jest bowiem napisany w formie symbolicznej. Warunek (14) można również napisać w formie symbolicznej. Uwzględniając warunek (24) możemy zatem napisać

$$\hat{I}_{zo+} = \hat{I}_{o-} = \hat{I}_{so+} + \hat{I}_{ao}. \quad (25)$$

Równanie (25) przedstawiono graficznie na rys. 7. Przy porównywaniu równania (25) z równaniem (23) widać, że

$$\hat{I}_{so+} = \frac{E_m e^{j(\alpha - \varphi_w)}}{Z_w}, \quad (26)$$

$$\hat{I}_{ao+} = \frac{U_m e^{j(\alpha - \delta - \varphi_w)}}{Z_w}. \quad (27)$$

Z identyczności równań (18) i (23) można wysnuć ważny wniosek, że składową okresową  $\hat{I}_{so}$  oraz bezokresową  $\hat{I}_{ao}$  można określić bezpośrednio po nastaniu zwarcia z warunków przedzwarcioowych obwodu rozważanego. o ile znane są: zastępca SEM-na źródła  $\hat{E}_o$  dla chwili  $t=0_-$  przed zwarciem, napięcie w miejscu zwarcia  $\hat{U}_o$  dla chwili  $t=0_-$  oraz oporność

wzierna  $Z_w$ , tj. oporność widziana z zacisków  $a, b$  miejsca zwarcia w kierunku SEM-nej  $\hat{E}$  przy  $\hat{E}=0$ , i odłączonej oporności obciążenia odbioru. Zastępca SEM-na źródła w myśl zasady Thévenina równa się napięciu na zaciskach  $a, b$ , przy odłączonej oporności odbioru (rys. 4).

Z rysunku 7 oraz z równań (22), (23) i (27) otrzymujemy znaną zależność wartości chwilowej składowej bezokresowej od fazy  $\alpha$ . Z rys. 7 wynika — z uwagi na fakt, iż wartość chwilowa  $\hat{I}_{ao}$  jest rzutem tegoż wektora na oś czasu  $t$  — że maksymalna wartość składowej bezokresowej  $I_{ao}$  zachodzi wówczas, gdy faza  $I_{ao+}$  z równania (27) jest równa zeru lub  $\pi$ , tj. gdy

$$\alpha - \delta \rightarrow \varphi_w = 0 \text{ (lub } \pm \pi\text{).} \quad (28)$$

Wówczas otrzymujemy

$$\alpha = \delta + \varphi_w$$

lub

$$\alpha = \delta + \varphi_w \pm \pi.$$

Warunek (28) oznacza, że wektor  $\hat{I}_{ao+}$  jest równoległy do osi czasu  $t$ .

### 3. MIEJSCE GEOMETRYCZNE PRĄDU ZWARCIOWEGO

Równanie (22) wyraża prąd zwarciowy w formie symbolicznej. Założymy na razie dla jego lepszej interpretacji, że oporność czynna  $R_w$  jest równa zeru, wówczas

$$e^{-\frac{R_w}{L_w} \cdot t} = 1 \quad \text{oraz} \quad \varphi_w = \frac{\pi}{2}$$

i równanie (22) upraszcza się do postaci

$$\hat{I}_{z(t)} = \frac{E_m}{Z_w} \cdot e^{j(a - \frac{\pi}{2} + \omega t)} - \frac{U_m}{Z_w} \cdot e^{j(a - \delta - \frac{\pi}{2})}. \quad (29)$$

Rysunek 8 przedstawia powyższe równanie w postaci graficznej.

Napięcie  $\hat{U}$  przyjmujemy pionowo w dodatnim kierunku osi  $y$ , a os czasu  $t$  w kierunku dodatniej osi  $x$ .

Kreślimy najpierw wektor  $\hat{I}_{o-}$ , przedstawiony jako odcinek  $OA$  na rys. 8. Z kolei odmierzamy odcinek  $OM$ , przy czym:

$$OM = -\frac{U_m}{Z_w} e^{j(a - \delta - \frac{\pi}{2})} = \hat{I}_{ao+}.$$

Wreszcie kreślimy prąd  $\hat{I}_{so+}$  (odcinek  $MA$ ):

$$MA = \frac{E_m}{Z_w} e^{j(a - \frac{\pi}{2})} = \hat{I}_{so+}.$$

Miejsce geometryczne prądu zwarciowego  $\hat{I}_{z(t)}$  otrzymamy obracając wektor  $\hat{I}_{so}+$  od położenia  $MA$  o kąt  $\omega t$  dla chwili  $t$ . Wówczas otrzymamy:

$$\overline{MF} = \hat{I}_{s(t)},$$

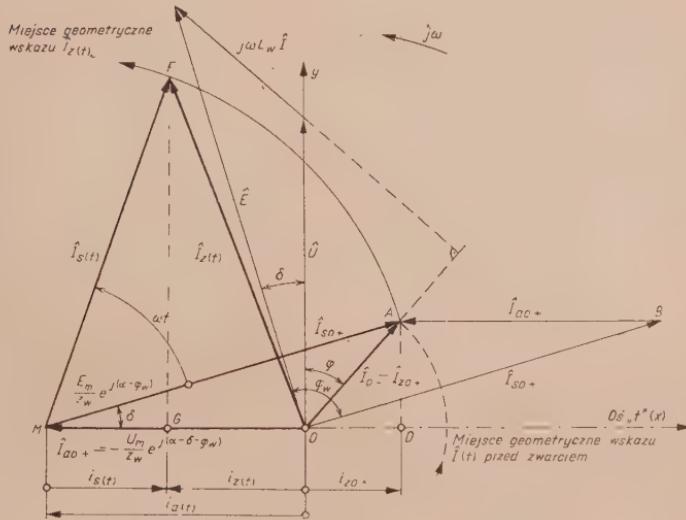
$$OF = \hat{I}_{z(t)}.$$

Wartości chwilowe prądu zwarciowego otrzymamy rzutując punkty  $F$  na oś czasu  $t$  (w przyjętym przykładzie oś czasu jest identyczna z dodatnią osią  $X$ ). Na rys. 8 mamy dla chwili  $t$  kąt obrotu  $\omega t$  oraz wartości chwilowe

$$i_{z(t)} = \overline{O} \dot{G},$$

$$i_{s(t)} = \overline{MG},$$

$$i_{a(t)} = i_{ao+} = \overline{OM}.$$



Rys. 8. Miejsce geometryczne prądu zwarciowego dla obwodu

z rys. 4, gdy  $R_w = 0$ ,  $\varphi_w = \frac{\pi}{2}$ ,  $a = \delta + \frac{\pi}{2}$ .

Na podstawie rys. 8 wyciągamy ważny wniosek: miejsce geometryczne prądu zwarciowego wynika z obrotu składowej okresowej  $\vec{I}_{so+}$  naokoło punktu  $M$ , czyli przy nieruchomym wektorze składowej aperiodycznej  $\vec{I}_{ao+}$ .

Interpretacja ta staje się jeszcze bardziej interesująca, jeśli równanie (22) napiszemy w innej postaci, a mianowicie pomnożymy je przez

$$\hat{Z}_w = Z_w \cdot e^{j\varphi_w},$$

Wówczas otrzymamy

$$E_m \cdot e^{j(a+\omega t)} = U_m e^{j(a-\delta)} \cdot e^{-\frac{R_w}{L_w} t} + \hat{Z}_w \cdot \hat{I}_{z(t)}. \quad (30)$$

W szczególności dla  $R_w = 0$  otrzymamy

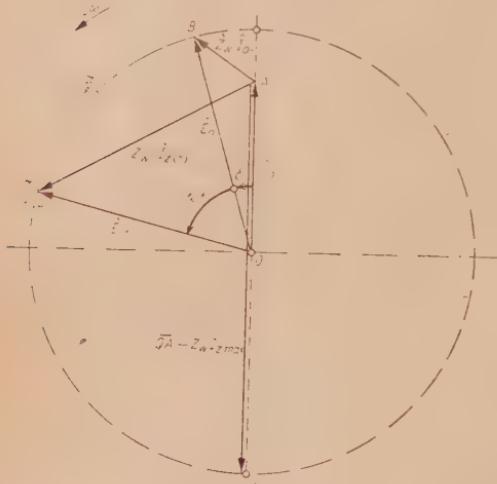
$$E_m e^{j(a+\omega t)} = U_m e^{j(a-\delta)} + Z_w \cdot e^{\frac{j\pi}{2}} \cdot \hat{I}_{z(t)}. \quad (31)$$

Zakładając dalej  $a = \delta + \frac{\pi}{2}$  otrzymamy

$$E_m \cdot e^{j\left(\delta + \frac{\pi}{2} + \omega t\right)} = U_m \cdot e^{j\left(\delta + \frac{\pi}{2} - \delta\right)} + Z_w e^{\frac{j\pi}{2}} \hat{I}_{z(t)},$$

skąd po podzieleniu równania przez  $e^{\frac{j\pi}{2}}$  wynika:

$$E_m e^{j(\delta + \omega t)} = U_m + Z_w \cdot \hat{I}_{z(t)}. \quad (32)$$



Rys. 9. Miejsce geometryczne wektora  $\hat{Z}_w \cdot \hat{I}_{z(t)}$ .

mamy od razu całkowity prąd zwarciowy  $\hat{I}_{z(t)}$ , przy czym

$$\hat{Z}_w \cdot \hat{I}_{z(t)} = \hat{E}_o e^{j\omega t} - \hat{U}_{o-} = \overline{AP}.$$

Na podstawie rys. 9 otrzymamy również w prosty sposób wartość prądu ударowego  $I_{z\max}$ , odczytujemy bowiem stamtąd:

$$\hat{Z}_w \cdot I_{z\max} = \overline{AQ} = U_{o-} + E_m.$$

Czas, przy którym zachodzi prąd ударowy, wynosi zatem

$$t_{(\max)} = \frac{\pi - \delta}{\omega}. \quad (33)$$

Równanie (32) posiada bardzo prostą interpretację graficzną, przedstawioną na rys. 9. Na rysunku tym wykreślono  $U_m = \hat{U}_o = OA$  oraz  $E_m e^{j\delta} = \hat{E}_o = OB$  i  $AB = \hat{Z}_w \cdot \hat{I}_o$ .

Wektor  $\hat{Z}_w \cdot \hat{I}_{z(t)}$  dla dowolnej chwili  $t$  otrzymamy, obracając  $\hat{E}_o$  o kąt  $\omega t$ , czyli do punktu  $P$  i łącząc punkt  $P$  na okręgu  $BP$  z punktem  $A$  nieruchomego wektora  $\hat{U}_o$ , to jest wektora napięcia w miejscu zwarcia dla chwili  $t=0_-$ . W ten sposób otrzymy-

#### 4. OBLICZANIE SKŁADOWYCH PRĄDU PRZY NAGŁEJ ZMIANIE OPORNOŚCI OBCIĄŻENIA

Dotychczas rozważano przypadek, w którym zwarto zaciski źródła. Występuje wtedy największa możliwa składowa zmienna prądu zwarciowego.

W praktyce zwarcie zachodzi najczęściej nie na zaciskach źródła, lecz w pewnej odległości od źródła. Analityczne traktowanie zagadnienia jest zatem nieco inne niż w rozdz. 2, przy czym zamiast układu zastępczego przedstawionego na rys. 4, obowiązuje układ zastępczy z rys. 10,

$\hat{U}_o$  — napięcie na zaciskach  $a-b$  źródła przy prądzie  $\hat{I}_o$ ,

$\hat{U}_1$  — napięcie na zaciskach  $a-b$  źródła przy prądzie  $\hat{I}$ ,

$\hat{Z}_o = (R_w + R_1) + j(X_w + X_1) = R_o + jX_o$  oporność zespolona przed zamknięciem wyłącznika  $S$ ,

$\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1$  oporność zespolona po zamknięciu wyłącznika  $S$ ,

$\hat{I}_o$  — prąd przy obciążeniu źródła opornością  $\hat{Z}_o$ ,

$\hat{I}_1$  — prąd przy obciążeniu źródła opornością  $\hat{Z}_1$ , to jest po zamknięciu wyłącznika  $S$ .

W chwili  $t=0-$ , czyli gdy wyłącznik  $S$  jest jeszcze otwarty, prąd  $\hat{I}_{o-}$  w obwodzie wyniesie

$$\hat{I}_{o-} = \frac{E_m \cdot e^{j\alpha}}{\hat{Z}_w + \hat{Z}_o}. \quad (33)$$

Po zamknięciu wyłącznika otrzymamy równanie różniczkowe

$$\hat{E}_t = (R_w + R_1) \hat{I}_{1t} + (L_w + L_1) \frac{d\hat{I}_{1t}}{dt}. \quad (34)$$

Równanie to wyrażone w formie operatorowej ma postać następującą:

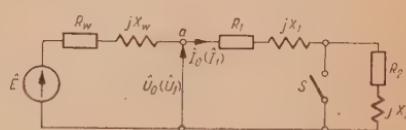
$$\frac{E_m e^{j\alpha}}{(s - j\omega)} = [(R_w + R_1) + s(L_w + L_1)] \hat{I}_{1(s)} - (L_w + L_1) \hat{I}_{o-},$$

stąd

$$\hat{I}_{1(s)} = \frac{E_m e^{j\alpha}}{(L_w + L_1)(s + a_1)(s - j\omega)} + \frac{\hat{I}_{o-}}{s + a_1}, \quad (35)$$

gdzie

$$a_1 = \frac{R_w + R_1}{L_w + L_1} - \frac{R_1}{L_w + L_1}. \quad (36)$$



Rys. 10. Układ zastępczy dla analizy zmiany parametrów obwodu zewnętrznego.

Rozwiązań tego równania jest

$$\hat{I}_{1(t)} = \frac{E_m e^{j(a+\omega t)}}{\hat{Z}_w + \hat{Z}_1} - \frac{E_m e^{ja} \cdot e^{-a_1 t}}{\hat{Z}_w + \hat{Z}_1} + \hat{I}_{o-} \cdot e^{-a_1 t} \quad (37)$$

Wyrażenie

$$\frac{E_m e^{ja}}{\hat{Z}_w + \hat{Z}_1} = \hat{I}_{1\text{so}} \quad (38)$$

oznacza składową symetryczną, czyli okresową prądu po zmianie parametrów obwodu dla chwili  $t=0+$ . Wyrażenie to można również przedstawić w postaci

$$\hat{I}_{1\text{so}} = \frac{E_m e^{ja}}{\hat{Z}_w + \hat{Z}_1} = \frac{E_m e^{ja} - \hat{U}_1}{\hat{Z}_w}, \quad (39)$$

gdzie

$$\hat{U}_1 = \hat{I}_{1\text{so}} \cdot \hat{Z}_1$$

oznacza napięcie na zaciskach źródła  $(a, b)$  po zmianie parametrów obwodu, to jest po zamknięciu wyłącznika  $S$ .

Podobnie do równania (39) dla prądu  $(\hat{I}_{o-})$  możemy napisać

$$\hat{I}_{o-} = \frac{E_m e^{ja} - \hat{U}_o}{\hat{Z}_w}. \quad (40)$$

Uwzględniając w równaniu (37) wyrażenia (39) i (40) napiszemy:

$$\hat{I}_{1(t)} = \hat{I}_{1\text{so}} \cdot e^{j\omega t} - \frac{E_m e^{ja} \cdot e^{-a_1 t}}{\hat{Z}_w} + \frac{\hat{U}_1 e^{-a_1 t}}{\hat{Z}_w} + \frac{E_m e^{ja} \cdot e^{-a_1 t}}{\hat{Z}_w} - \frac{\hat{U}_o e^{-a_1 t}}{\hat{Z}_w},$$

czyli:

$$\hat{I}_{1(t)} = \hat{I}_{1\text{so}} \cdot e^{j\omega t} - \frac{\hat{U}_o - \hat{U}_1}{\hat{Z}_w} \cdot e^{-a_1 t}. \quad (41)$$

Równanie (41) objaśnione jest graficznie na rysunku 11.

Z rys. 11 są dane: napięcie  $\hat{U}_o$  przed zmianą parametrów oraz napięcie  $\hat{U}_1$  po zmianie parametrów. Widzimy zatem, że składowa bezokreślona  $\hat{I}_{ao}$  jest prostopadła do różnicy napięć  $\Delta\hat{U}$

$$\Delta\hat{U} = \hat{U}_o - \hat{U}_1.$$

<sup>1</sup> gdzie:  $a$  — faza SEM-nej  $E$ , a  $a_1$  — współczynnik tłumienia ze wzoru (36).



Rys. 11. Wykres wektorowy składowych prądu  $\hat{I}_{1(t)}$  zgodnie z równaniem (41) dla chwili  $t=0-$  oraz  $t=0+$ .

Jeśli  $Z_w$  jest czystą opornością indukcyjną, składowa bezokresowa w chwili  $t=0+$  wynosi

$$\hat{I}_{ao} = -\frac{\hat{U}_o - \hat{U}_1}{\hat{Z}_w} = -\frac{\hat{U}_o - \hat{U}_1}{jX_w} = -\frac{\Delta \hat{U}}{jX_w}. \quad (42)$$

Przebieg prądu zwarciowego otrzymamy zatem dla pierwszych chwil po nastaniu zwarcia

$$\hat{I}_{1(t)} = \hat{I}_{1so} \cdot e^{j\omega t} + \hat{I}_{ao} \cdot e^{-\zeta_1 t}. \quad (43)$$

Obliczenie całkowitego prądu  $\hat{I}_{1(t)}$  polega więc:

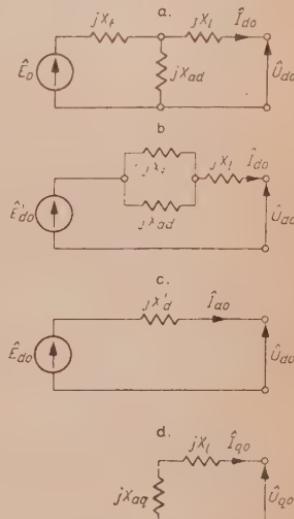
1. na wyznaczeniu składowej okresowej  $\hat{I}_{1so} \cdot e^{j\omega t}$  dla nowego stanu obciążenia,
2. na obliczeniu wektora  $\Delta \hat{U}$  i wyznaczeniu składowej bezokresowej  $\hat{I}_{ao}$  z równania (42).

5. ZASTOSOWANIE METODY USTALONEGO WEKTORA NAPIĘCIA DO WYPROWADZENIA RÓWNANIA PRĄDU ZWARCIOWEGO WYSTĘPUJĄCEGO W GENERATORZE SYNCHRONICZNYM JAWNObIEGUNOWYM PRZY ZWARCIU NA ZACISKACH GENERATORA

Rozważania z rozdz. 2 i 3 można zastosować wprost do obliczania prądu zwarciowego generatora synchronicznego jawnobiegunkowego przez odpowiednią interpretację wykresu składowych prądu bądź napięć w stanie przed-zwarciami oraz w chwili bezpośredniej po nastaniu zwarcia.

Interpretacja nasza będzie oparta na ustaleniu wektora różnicy napięć pomiędzy napięciem w miejscu zwarcia bezpośrednio przed zwarciem i bezpośrednio po zwarciu.

Założymy na razie maszynę bez uzwojeń tłumiących. Założymy ponadto, że oporności czynne uzwojeń stojana są małe wobec oporności indukcyjnych, tak że można je pominać przy obliczaniu składowych prądu zwarciowego. Założymy dalej, że zwarcie występuje na zaciskach maszyny. Na podstawie teorii maszyny synchronicznej możemy układy zastępcze dla maszyny bez uzwojenia tłumiącego przedstawić jak na rys. 12. W szczególności na podstawie rys. 12c i rys. 12d otrzymamy:



Rys. 12. Układy zastępcze generatora jawnobiegunkowego bez uzwojenia tłumiącego.

$$\hat{E}'_{do} = \hat{U}_{do} + jX_d \hat{I}_{do}, \quad (44)$$

$$o = \hat{U}_{qo} + jX_q \hat{I}_{qo}. \quad (45)$$

Z rys. 12b i rys. 12c wynika

$$X'_d = X_l + \frac{X_{ad} \cdot X_f}{X_{ad} + X_f}, \quad (46)$$

a z rys. 12d i z równania (45):

$$X'_q = X_q = X_l + X_{aq}, \quad (47)$$

gdzie

$X_f$  — oporność rozproszenia uzwojenia wzbudzającego.

$X_l$  — " " " stojana,

$X_{ad}$  — " " " głowna uzwojenia stojana w osi podłużnej,

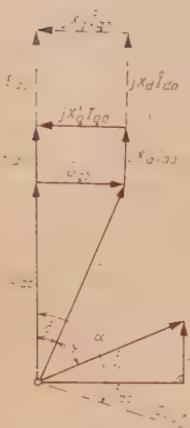
$X_{aq}$  — " " " " " poprzecznej,

$X'_d$  — " " " przejściowa uzwojenia stojana w osi podłużnej,

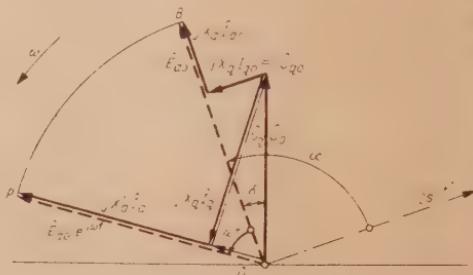
$X'_q$  — " " " " " poprzecznej.

Na podstawie równań (44) i (45) możemy narysować wykres wektorowy generatora synchronicznego jawnobiegunowego bez uzwojenia tłumiącego — rys. 13.

Załóżmy, że na zaciskach generatora zachodzi zwarcie, to znaczy nagłe obniżenie się napięcia z wielkości  $\hat{U}_o$  do zera. Do wyznaczenia składowych prądu zwarcioowego zastosujemy sposób objaśniony w rozdz. 2 oraz na rys. 9.



Rys. 13. Wykres wektorowy generatora jawnobiegunowego bez uzwojenia tłumiącego dla stanu przedzwarcioowego z uwzględnieniem SEM-nej przejściowej  $E'_do$ .



Rys. 14. Wykres wektorowy generatora jawnobiegunowego bez uzwojenia tłumiącego przy zwarciu na zaciskach dla chwili  $t=0$  oraz dla chwil  $t$  po nastaniu zwarcia.

Na rys. 14 przedstawiono ponownie fragment wykresu wektorowego z rys. 13.

Po narysowaniu położenia SEM-nej przejściowej  $E'_do$  dla chwili  $t=0$ , obracamy wektor  $\hat{E}'_{do}$  o kąt  $\omega t$  i postępujemy tak, jak to pokazano na rys. 9, z tą zasadniczą zmianą, że obecnie obowiązują równania:

dla chwili  $t=0$ :

$$\hat{E}'_{do} = \hat{U}_o + jX'_d \hat{I}_{do} + jX'_q \hat{I}_{qo}, \quad (48)$$

dla chwili  $t$ :

$$\hat{E}'_{do} \cdot e^{j\omega t} = \hat{U}_o + jX'_d \hat{I}_d + jX'_q \cdot \hat{I}_q. \quad (49)$$

Równanie (49) możemy napisać również w postaci:

$$\hat{E}'_{do} \cdot e^{j(\omega t + \alpha)} = \hat{U}_d + jX'_d \hat{I}_d, \quad (50)$$

$$0 = \hat{U}_q + jX'_q \cdot \hat{I}_q. \quad (51)$$

Wynika stąd

$$\hat{I}_d = \frac{\hat{E}'_{do} \cdot e^{j(\omega t + \alpha)} - \hat{U}_d}{jX'_d}, \quad (52)$$

$$\hat{I}_q = -\frac{\hat{U}_q}{jX'_q}. \quad (53)$$

Następnie otrzymujemy

$$\hat{U}_d = U_o \cdot e^{j(\omega t + \alpha)} \cos(\omega t + \delta) = \frac{U_o}{2} e^{j(2\omega t + \alpha + \delta)} + \frac{U_o}{2} e^{j(\alpha - \delta)}, \quad (54)$$

$$\hat{U}_q = -jU_o \cdot e^{j(\omega t + \alpha)} \sin(\omega t + \delta) = -\frac{U_o}{2} e^{j(2\omega t + \alpha + \delta)} + \frac{U_o}{2} e^{j(\alpha - \delta)}. \quad (55)$$

Podstawiając wartości  $\hat{U}_d$  i  $\hat{U}_q$  z równań (54) oraz (55) w równania (52), i (53) otrzymamy

$$\begin{aligned} \hat{I}_{zt} = \hat{I}_d + \hat{I}_q &= \frac{\hat{E}'_{do} \cdot e^{j(\omega t + \alpha)}}{jX'_d} - \frac{U_o}{2jX'_d} e^{j(2\omega t + \alpha + \delta)} - \frac{U_o}{2jX'_d} e^{j(\alpha - \delta)} + \\ &+ \frac{U_o}{2jX'_q} e^{j(2\omega t + \alpha + \delta)} - \frac{U_o}{2jX'_q} e^{j(\alpha - \delta)}. \end{aligned}$$

Po uporządkowaniu otrzymamy wynik

$$\hat{I}_{zt} = \frac{\hat{E}'_{do} \cdot e^{j(\omega t + \alpha)}}{jX'_d} - j \frac{U_o \cdot e^{j(2\omega t + \alpha - \delta)}}{2 \frac{X'_d X'_q}{X'_d - X'_q}} + j \frac{U_o \cdot e^{j(\alpha - \delta)}}{2 \frac{X'_d X'_q}{X'_d - X'_q}}. \quad (56)$$

Porównując równanie (56) z równaniem (8) widzimy daleko idącą analogię. Wystarczy bowiem zastąpić SEM-ną synchroniczną  $E_d$  — SEM-ną przejściową  $E'_{do}$ , a oporności  $X_d$  i  $X_q$  opornościami  $X'_d$  oraz  $X'_q$ . Z uwagi na fakt, że  $X'_q = X_q$  jest większe od oporności przejściowej w osi podłużnej  $X'_d$ , oporność dodatnią

$$2 \cdot \frac{X'_d X'_q}{X'_q - X'_d} = X'_{2h} \quad (57)$$

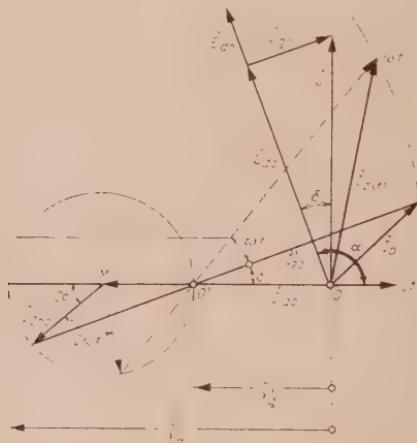
nazywamy opornością przejściową dla drugiej harmonicznej; oporność

$$2 \cdot \frac{X'_d X'_q}{X'_d + X'_q} = X'_2 \quad (58)$$

nazywamy opornością przejściową dla składowej przeciwniej. Oporność ta występuje przy zasilaniu stojana prądem trójfazowym o polu wirującym w kierunku przeciwnym do kierunku obrotów zwanego wirnika, który nie posiada uwzijenia tłumiącego.

Ostatecznie możemy napisać równanie dla prądu zwarciowego w stojanie generatora synchronicznego jawnobiegunowego bez uzwojeń tłumiących w postaci

$$\hat{I}_{zt} = \frac{E'_d}{jX'_d} e^{j(\omega t - \alpha)} + j \frac{U_o}{X'_{2h}} e^{j(2\omega t + \alpha + \delta)} + j \frac{U_o}{X'_2} e^{j(\alpha - \delta)}. \quad (59)$$



Rys. 15. Składowe prądu zwarzowego generatora jawnobiegunowego bez uzwojenia tłumiącego zgodnie z równaniem (59) przedstawione w formie graficznej.

Wzór (59) ma interpretację graficzną uwidocznioną na rys. 15. Przyjęto fazy

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \delta,$$

stad

$$j \cdot e^{j(2\omega t + a + \delta)} = -e^{j(2\omega t + 2\delta)} \quad |$$

oraz

$$j \cdot e^{j(\alpha - \delta)} = -1.$$

Równanie (59) przekształca się wówczas w postać:

$$\hat{I}_{zt} = \frac{E'_{do}}{X'_d} e^{j(\omega t - \delta)} - \frac{U_o}{X'_{2h}} e^{j(2\omega t - 2\delta)} - \frac{U_o}{X'_2} = \hat{I}'_{st} + \hat{I}'_{2ht} + \hat{I}'_{at}. \quad (60)$$

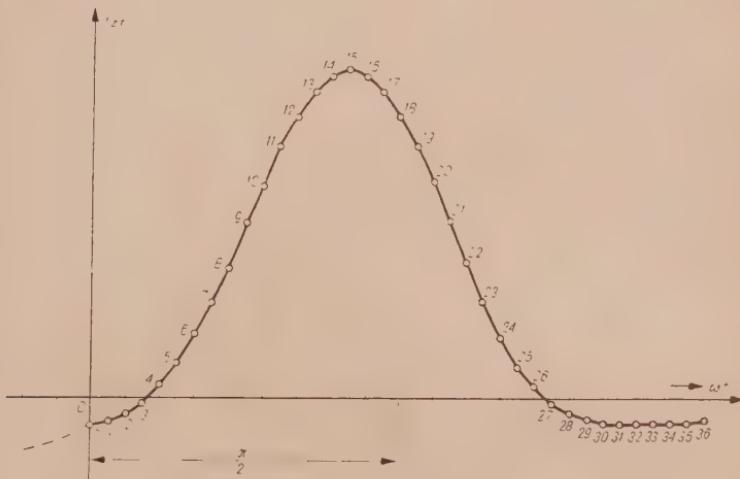
Rysunek 15 sporządzono dla hydrogeneratora o danych:

$$X_d = 1,02; \quad X_q = 0,604; \quad X'_d = 0,273;$$

$$X'_2 = 0,377; \quad X'_{2h} = 0,998.$$

Parametry te podano w jednostkach względnych. Jako obciążenie przedzwarciowe założono: napięcie znamionowe, prąd znamionowy oraz  $\cos \varphi = 0,8$ . Kąt  $\delta$  obliczono ze wzoru (12) dla  $I_o = 1$ ,  $U_o = 1$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{0,604 \cdot 0,8}{1 + 0,604 \cdot 0,6} = 0,355 \quad (\delta = 19,6^\circ).$$



Rys. 16. Slimak Pascal'a dla wektora prądu zwarciowego generatora jawnobiegowego bez uwożenia tłumiącego.

W myśl równania (60) odmierzono:

$$\hat{I}'_{ao} = - \frac{U_o}{X'_2} = - \frac{1}{0,377} = - 2,66,$$

$$\hat{I}'_{2ho} = - \frac{U_o}{X'_{2h}} e^{j2\delta} = - 1,002 e^{j39,2^\circ},$$

$$\hat{I}'_{so} = \frac{E'_{do}}{X'_d} e^{j\delta} = 4,27 \cdot e^{j19,6^\circ},$$

gdzie

$$E'_{do} = U_{do} + X'_d I_{do},$$

przy czym

$$U_{do} = U_o \cos \delta = 1 \cdot \cos 19,4^\circ = 0,94,$$

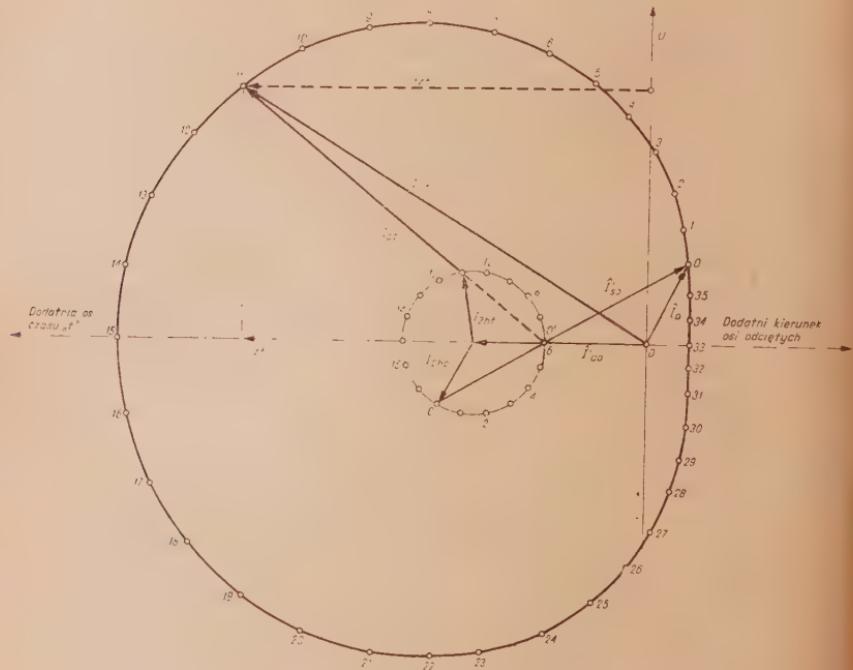
$$I_{do} = I_o \sin (\varphi + \delta) = 1 \cdot \sin (36,8 + 19,4^\circ) = 0,83,$$

zatem

$$E'_{do} = 0,94 + 0,273 \cdot 0,83 = 0,94 + 0,226 = 1,066.$$

Na rys. 15 przedstawiono ponadto miejsce geometryczne prądu zwarciowego z zaznaczeniem konstrukcji. Miejsce geometryczne prądu zwarciowego  $\hat{I}_{zt}$  leży na ślimaku Pascala.

Na rys. 16 narysowano dla przykładu z rys. 15 ślimak Pascala dla jednego kompletnego cyklu, a na rys. 17 przebieg wartości chwilowych



Rys. 17. Przebieg chwilowych wartości prądu zwarciowego generatatora jawnobiegunowego bez uzwojenia tłumiącego.

prądu zwarciowego, które otrzymuje się przez rzutowanie poszczególnych punktów miejsca geometrycznego na oś czasu  $t$ , identyczną z ujemnym kierunkiem osi odciętych na rys. 16.

6. ZASTOSOWANIE METODY USTALONEGO WEKTORA NAPIĘCIA  
DO WYZNACZENIA WIELKOŚCI PRĄDU WYSTĘPUJĄCEGO W GENERATORZE  
SYNCHRONICZNYM JAWNObIEGUNOWYM PRZY NAGŁYCH ZMIANACH  
OBCIĄŻENIA

Jak już zaznaczono w rozdz. 4, najczęstszy przypadek występowania zmian nieustalonych w generatorach synchronicznych zachodzi nie przy zatrzymaniu na zaciskach generatora, lecz przy naglej zmianie oporności obciążenia na sieci. Analiza prostego przypadku pokazanego na rys. 10 wykazała, że całkowity prąd po zmianie oporności obciążenia oblicza się na podstawie dodania do składowej okresowej — obliczonej dla nowego stanu sieci — składowej bezokresowej.

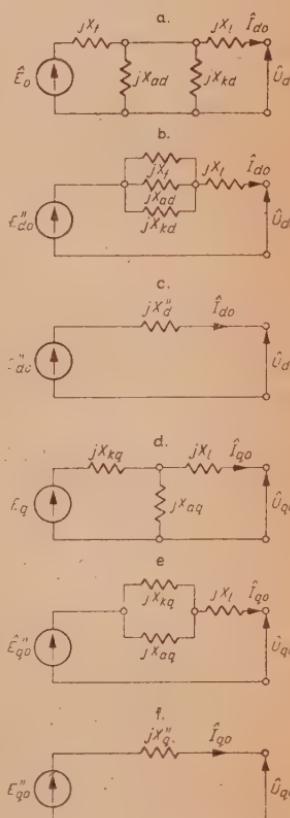
Składowa bezokresowa, stanowiąca różnicę między prądem ustalonym dla dawnego stanu sieci a prądem ustalonym dla nowego stanu sieci, wynika z podzielenia różnicy napięć pomiędzy napięciem przedzwarciozym a napięciem pozwarzciowym przez oporność wewnętrzna źródła.

Korzystając z zasady obliczenia, podanej w rozdz. 4, wyprowadzimy obecnie równania składowych prądu w najogólniejszym przypadku naglej zmiany parametrów obciążenia. Obliczenia przeprowadzimy dla generatora jawnobiegunkowego, wyposażonego w uzwojenia tłumiące. Na rysunku 18 przedstawiono schematy zastępcze generatora w myśl zasad teorii maszyny synchronicznej. Na rysunku 18c oraz rys. 18f w szczególności obowiązują równania:

$$\hat{E}_{do}'' = \hat{U}_{do} + jX_d'' \hat{I}_{do} \quad (61)$$

$$\hat{E}_{qo}'' = \hat{U}_{qo} + jX_q'' \hat{I}_{qo} \quad (62)$$

Wykres wektorowy napięć i prądów generatora dla normalnego obciążenia przedzwarcioowego przedstawiono na rys. 19. W odróżnieniu od rys. 1 wprowadzono zamiast jednej SEM-nej, tj. SEM-nej synchronicznej w osi podłużnej  $E_d$ , dwie nowe SEM-ne: SEM-ną przejściową wstępową w osi podłużnej  $E_{do}''$  oraz SEM-ną przejściową wstępową w osi po-



Rys. 18. Układy zastępcze generatora jawnobiegunkowego z uzwojeniem tłumiącym w osi podłużnej oraz w osi poprzecznej.

poprzecznej  $E''_{qo}$ , których wartości oblicza się przy danym napięciu  $U$  z równań (61) oraz (62) (porównaj również rys. 18c i 18f).

Załóżmy, że generator jest obciążony opornością zespoloną

$$\hat{Z}_z = R_z + jX_z, \quad (63)$$

wówczas otrzymamy zależność pomiędzy napięciem na zaciskach generatora a prądem obciążenia według równania:

$$\hat{U}_o = \hat{U}_{do} + \hat{U}_{qo} = (R_z + jX_z)(\hat{I}_{do} + \hat{I}_{qo}).$$

Zakładając, że oś rzeczywistych jest zgodna z kierunkiem  $\hat{U}_{do}$ , otrzymamy

$$\hat{U}_{do} = U_{do}; \quad \hat{U}_{qo} = -jU_{qo}; \quad \hat{I}_{do} = -jI_{do}; \quad \hat{I}_{qo} = I_{qo},$$

stąd w formie symbolicznej

$$\hat{U}_{do} = jX_z \cdot \hat{I}_{do} + R_z \cdot \hat{I}_{qo}, \quad (64)$$

$$\hat{U}_{qo} = R_z \cdot \hat{I}_{do} + jX_z \cdot \hat{I}_{qo} \quad (65)$$

lub algebraicznie

$$U_{do} = X_z I_{do} + R_z I_{qo}, \quad (66)$$

$$U_{qo} = R_z I_{do} - X_z I_{qo}. \quad (67)$$

Wprowadzając równania (64) oraz (65) do równań (61) i (62) otrzymamy w formie symbolicznej

$$j(X_z + X''_d) \hat{I}_{do} + R_z \cdot \hat{I}_{qo} = \hat{E}_{do}'',$$

$$R_z \cdot \hat{I}_{do} + j(X_z + X''_q) - \hat{I}_{qo} = \hat{E}_{qo}''. \quad (68)$$

Rozwiązuje powyższe równania otrzymamy prądy składowe w formie symbolicznej

$$\hat{I}_{do} = \frac{-j(X''_q + \hat{X}_z) E''_{do} + \hat{R}_z \cdot E''_{qo}}{(X''_d + X_z) \cdot (X''_q + X_z) + R_z^2}, \quad (68)$$

$$\hat{I}_{qo} = \frac{R_z \cdot \hat{E}_{do}'' - j(X''_d + X_z) \hat{E}_{qo}''}{(X''_d + X_z)(X''_q + X_z) + R_z^2}. \quad (69)$$

Równania (68) i (69) przedstawione w formie algebraicznej mają postać

$$I_{do} = \frac{(X''_q + X_z) E''_{do} + R_z \cdot E''_{qo}}{(X''_d + X_z)(X''_q + X_z) + R_z^2}, \quad (70)$$

$$I_{qo} = \frac{R_z E''_{do} - (X''_d + X_z) E''_{qo}}{(X''_d + X_z)(X''_q + X_z) + R_z^2}. \quad (71)$$

Kąt  $\delta_o$  możemy obliczyć albo ze wzoru (12), gdy dane są: napięcie  $U_o$ , rząd  $I_o$  oraz współczynnik mocy  $\cos \varphi_o$  lub ze wzoru

$$\operatorname{tg} \delta_o = \frac{R_z X_q'' \cdot E_{do}'' + E_{qo}'' (X_d'' X_z + X_z^2 + R_z^2)}{E_{do}'' (X_q'' X_z + X_z^2 + R_z^2) - R_z X_d'' \cdot E_{qo}''}, \quad (72)$$

dy dane są SEM-ne  $E_{do}''$  i  $E_{qo}''$  oraz parametry maszyny: oporność przejściowa wstępna w osi podłużnej  $X_d''$  i poprzecznej  $X_q''$ , jak również oporności  $R_z$  oraz  $X_z$  obwodu zewnętrznego.

Wzory (70) i (71) są ogólnie ważne dla obliczania składowych podłużnej i poprzecznej uogólnionego wektora prądu pierwszej harmonicznej przy dowolnym stanie obciążenia. Przy normalnym obciążeniu dane są: napięcie  $U_o$ , rząd  $I_o$  oraz  $\cos \varphi_o$ . Wówczas  $\operatorname{tg} \delta_o$  obliczamy ze wzoru (12), następnie po obliczeniu składowych  $U_{do}$  oraz  $U_{qo}$  z równań:

$$U_{do} = U_o \cos \delta_o, \quad (73)$$

$$U_{qo} = U_o \sin \delta_o, \quad (74)$$

obliczamy ze wzorów (61) oraz (62) SEM-ne  $E_{do}''$  oraz  $E_{qo}''$ .

Następnie z równań (70) oraz (71) obliczamy prądy  $I_{do}$  oraz  $I_{qo}$ . Prądy te możemy również otrzymać z równań:

$$I_{do} = I_o \sin (\varphi_o + \delta_o), \quad (75)$$

$$I_{qo} = I_o \cos (\varphi_o + \delta_o). \quad (76)$$

Jeśli oporność obciążenia  $R_z + jX_z$  zmieni się nagle na nową oporność  $R_z'' + jX_z''$ , wówczas ze wzorów (70) i (71) obliczamy nowe składowe  $I_{do}''$  oraz  $I_{qo}''$  zakładając, że SEM-ne  $E_{do}''$  oraz  $E_{qo}''$  pozostają te same i zamiast oporności  $R_z$  oraz  $X_z$ , wstawiamy nowe oporności  $R_z''$  oraz  $X_z''$ . W ten sposób otrzymamy od razu składową podłużną przejściową wstępna pierwszej harmonicznej  $I_{do}''$ . W celu obliczenia prądów wyrównawczych, tj. składowej bezokresowej  $I_{ao}''$  oraz składowej drugiej harmonicznej  $I_{2ho}''$ , posługujemy się rozumowaniem z poprzednich rozdziałów, mianowicie stosujemy równanie (25) w rozszerzonej formie

$$\hat{I}_{zo+} = \hat{I}_{o-} = \hat{I}_{so+} + \hat{I}_{wo}. \quad (77)$$

Z równania tego wynika, że rząd na chwilę przed zmianą stanu równa się prądowi  $I_{so+}$ , odpowiadającemu nowemu stanowi ustalonemu dla chwili  $t=0+$  oraz prądowi wyrównawczemu  $I_{wo}$ . Prąd wyrównawczy w obwodach prostych jest identyczny ze składową bezokresową, w maszynie jawnobiegunowej natomiast prąd wyrównawczy składa się bieżąco z dwóch składowych: składowej bezokresowej  $I_{ao}''$  oraz ze składowej drugiej harmonicznej  $I_{2ho}''$ . Składowe te obliczamy jak następuje. Najpierw dla nowego obciążenia ze wzorów (70) i (71) obliczamy prądy  $I_{do}''$  oraz  $I_{qo}''$

$$I''_{do} = \frac{(X''_q + X''_z) E''_{do} + R''_z \cdot E''_{qo}}{(X''_d + X''_z) (X''_q + X''_z) + (R''_z)^2}, \quad (7)$$

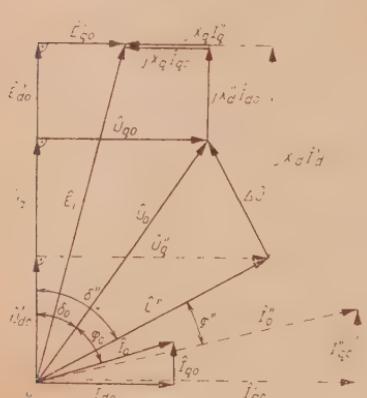
$$I''_{qo} = \frac{R''_z \cdot E''_{do} - (X''_d + X''_z) E''_{qo}}{(X''_d + X''_z) (X''_q + X''_z) + (R''_z)^2}. \quad (7)$$

Następnie z równań (66) i (67) obliczamy:

$$U''_{do} = X''_z I''_{do} + R''_z \cdot I''_{qo}, \quad (80)$$

$$U''_{qo} = R''_z I''_{do} - X''_z I''_{qo}. \quad (81)$$

W dalszym ciągu stosując równania:



Rys. 19. Wykres wektorowy generatora jawnobiegunowego z uzwojeniem tłumiącym uwzględnieniem SEM-nej przejściowej wstępnej w osi podłużnej  $E''_{do}$  oraz SEM-nej przejściowej wstępnej w osi poprzecznej  $E''_{qo}$ .

Za oś rzeczywistą przyjmijmy teraz oś SEM-nej  $E'_{do}$ , a za oś urojonych — kierunek prostopadły do osi  $E''_{do}$  obrócony o  $90^\circ$  w przód. Wówczas możemy wprowadzić oznaczenia (patrz rys. 19):

$$\hat{U}_{do} = U_o \cos \delta_o = \frac{U_o}{2} e^{j\delta_o} + \frac{U_o}{2} e^{-j\delta_o}, \quad (88)$$

$$\hat{U}''_{do} = U''_o \cos \delta'' = \frac{U''_o}{2} e^{j\delta''} + \frac{U''_o}{2} e^{-j\delta''}, \quad (89)$$

$$\hat{E}''_{do} = \hat{U}_{do} + jX''_d \hat{I}_{do}, \quad (82)$$

$$\hat{E}''_{do} = \hat{U}''_{do} + jX''_d \hat{I}''_{do}, \quad (83)$$

$$O = (\hat{U}_{do} - \hat{U}''_{do}) + jX''_d (\hat{I}_{do} - \hat{I}''_{do}),$$

czyli

$$\Delta \hat{I}_{do} = \hat{I}''_{do} - \hat{I}_{do} = \frac{\hat{U}_{do} - \hat{U}''_{do}}{jX''_d} \quad (84)$$

analogicznie otrzymujemy:

$$\hat{E}''_{qo} = \hat{U}_{qo} + jX''_q \hat{I}_{qo}, \quad (85)$$

$$\hat{E}''_{qo} = \hat{U}''_{qo} + jX''_q \hat{I}''_{qo}, \quad (86)$$

$$O = (\hat{U}_{qo} - \hat{U}''_{qo}) + jX''_q (\hat{I}_{qo} - \hat{I}''_{qo}),$$

czyli

$$\Delta \hat{I}_{qo} = \hat{I}''_{qo} - \hat{I}_{qo} = \frac{\hat{U}_{qo} - \hat{U}''_{qo}}{jX''_q} \quad (87)$$

$$\hat{U}_{qo}'' = -jU_o \sin \delta_o = -\frac{U_o}{2} e^{j\delta_o} + \frac{U_o}{2} e^{-j\delta_o}, \quad (90)$$

$$\hat{U}_{qo}'' = -jU_o'' \sin \delta'' = -\frac{U_o''}{2} e^{j\delta''} + \frac{U_o''}{2} e^{-j\delta''}. \quad (91)$$

ad wyrównawczy otrzymamy ze wzoru (77)

$$\hat{I}_{wo} = \hat{I}_o - \hat{I}_{so} = \hat{I}_o - \hat{I}_o'' = -\Delta \hat{I}'$$

yli

$$\hat{I}_{wo} = \Delta \hat{I}_{do} - \Delta \hat{I}_{qo} = \frac{\hat{U}_{do}'' - \hat{U}_{do}}{jX_d''} + \frac{\hat{U}_{qo}'' - \hat{U}_{qo}}{jX_q''}$$

prowadząc w powyższe równanie wartości napięć, obliczone na podstawie równań (88) do (91), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{wo} &= \frac{U_o'' e^{j\delta''}}{2jX_d''} + \frac{U_o'' e^{-j\delta''}}{2jX_d''} - \frac{U_o e^{j\delta_o}}{2jX_d''} - \frac{U_o e^{-j\delta_o}}{2jX_d''} \\ &= \frac{U_o''}{2jX_q''} e^{j\delta''} + \frac{U_o''}{2jX_q''} e^{-j\delta''} + \frac{U_o e^{j\delta_o}}{2jX_q''} - \frac{U_o e^{-j\delta_o}}{2jX_q''}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{wo} &= \frac{U_o'' e^{j\delta''}}{2j} \left( \frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_q''} \right) + \frac{U_o'' e^{-j\delta''}}{2j} \left( \frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''} \right) - \\ &\quad - \frac{U_o e^{j\delta_o}}{2j} \left( \frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_q''} \right) - \frac{U_o e^{-j\delta_o}}{2j} \left( \frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''} \right). \end{aligned}$$

małej przeróbce otrzymamy w ostatecznej formie symbolicznej

$$\hat{I}_{wo} = \frac{U_o'' e^{j\delta''} - U_o e^{j\delta_o}}{jX_{2h}''} + \frac{U_o'' e^{-j\delta''} - U_o e^{-j\delta_o}}{jX_2''}, \quad (92)$$

zie

$$X_{2h}'' = \frac{2X_d'' X_q''}{X_q'' - X_d''}, \quad (93)$$

$$X_2'' = \frac{2X_d'' X_q''}{X_q'' + X_d''}. \quad (94)$$

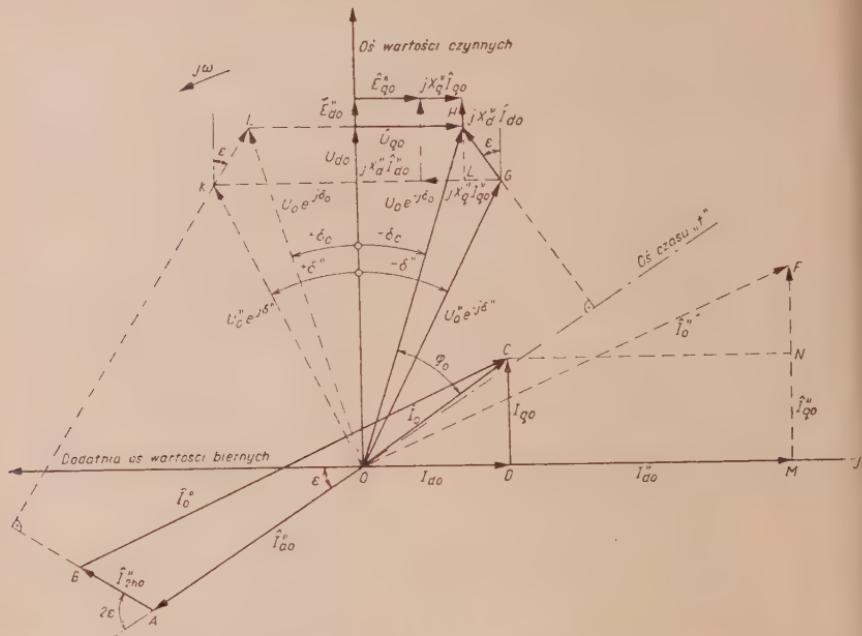
W wzorze (92) istnieją 2 składniki. Pierwszy składnik

$$\hat{I}_{ao}'' = \frac{U_o'' e^{-j\delta''} - U_o e^{-j\delta_o}}{jX_2''} \quad (95)$$

w innej postaci

$$\hat{I}_{ao}'' = \frac{U_{qo} - U_{qo}''}{X_2''} + j \frac{U_{do} - U_{do}''}{X_2''} = \frac{\Delta U_{qo}''}{X_2''} + j \frac{\Delta U_{do}''}{X_2''} \quad (96)$$

przedstawia składową bezokresową dla chwili  $t=0+$ , która następnie ma leje wykładniczo ze stałą czasową bezokresową  $T_a''$ .



Rys. 20. Składowe prądu przejściowego wstępniego przy naglej zmianie obciążenia generatora synchronicznego jawnobiegunowego z uzwojeniem tłumiącym przedstawione graficznie.

### Drugi składnik

$$\hat{I}_{2ho}' = \frac{U_o'' e^{j\delta''} - U_o e^{j\delta_0}}{jX_{2h}''} \quad (97)$$

lub w innej formie

$$\hat{I}_{2ho}'' = -\frac{U_{q0} - U_{q0}''}{X_{2h}''} + j \frac{U_{d0} - U_{d0}''}{X_{2h}''} = -\frac{\Delta U_{q0}''}{X_{2h}''} + j \frac{\Delta U_{d0}''}{X_{2h}''} \quad (98)$$

przedstawia składową drugiej harmonicznej prądu wyrównawczego dla chwili  $t=0+$ . Składowa ta również zanika wykładniczo ze stałą czasową bezokresową  $T_a''$ , przy czym

$$T_a'' = \frac{X_2''}{R'' \cdot \omega} = \frac{2(X_d'' + X_z'')(X_q'' + X_z'')}{[X_d'' + X_q'' + 2X_z''] \cdot (R_z'' + R_2) \cdot \omega} \quad (99)$$

We wzorze (99)  $R_2$  oznacza oporność jednej fazy uzwojenia stojana dla składowej przeciwniej prądu.

Wzór (99) na stałą czasową  $T''_a$  jest ważny przy zwarciu trójfazowym albo przy zmianie oporności obciążenia jednocześnie we wszystkich trzech fazach układu.

Na rysunku 20 uwidoczniono interpretację graficzną wyprowadzonych ównań.

Przed zmianą obciążenia generator ma napięcie  $\hat{U}_o$  oraz prąd  $\hat{I}_o$  przy osi  $\varphi_o$ . Na rys. 20 podano wektory:  $\hat{U}_o$ ,  $\hat{U}_{do}$ ,  $\hat{U}_{qo}$  oraz prądy:  $I_o = \overline{AC}$ ,  $I_{ao} = \overline{OD}$ ,  $I_{qo} = \overline{DC}$ . Następnie założono obniżkę napięcia do wielkości  $\hat{U}''_o = \overline{OG}$ . Geometryczna strata napięcia wynosi  $\Delta\hat{U}''_o = \overline{GH}$ , składowe  $\hat{U}''_{do} = \overline{LH}$  i  $\hat{U}''_{qo} = \overline{GL}$  zaznaczono również na rysunku. Obliczone ze wzorów (84) i (87) zmiany składowych okresowych pierwszej harmonicznej  $\Delta\hat{I}_{do}$  oraz  $\Delta\hat{I}_{qo}$  narysowano w postaci odcinków  $\overline{DM}$  względnie  $\overline{NF}$ . Obliczona ze wzoru (96) składowa bezokresowa  $I''_{ao} = \overline{OA}$  jest prostopadła do wektora  $\Delta\hat{U}''_o = \overline{GH}$  i wynosi:

$$I''_{ao} = \frac{\Delta U''_o}{X''_2} = \frac{\sqrt{(\overline{U}_{do} - \overline{U}''_{do})^2 + (\overline{U}_{qo} - \overline{U}''_{qo})^2}}{X''_2}. \quad (100)$$

Obliczona ze wzoru (98) składowa drugiej harmonicznej  $I''_{2ho} = \overline{AB}$  jest prostopadła do wektora  $\overline{KL} = \hat{U}''_o e^{-j\epsilon}$ , tj. do wektora stanowiącego wierciadlane odbicie wektora  $\Delta\hat{U}''_o = \overline{GH}$  względem osi wartości czynnych, której leżą wartości  $E''_{do}$  oraz  $U_{do}$  i  $U''_{do}$ .

Wartość drugiej harmonicznej wynika ze wzoru

$$I''_{2ho} = \frac{\sqrt{(\overline{U}_{do} - \overline{U}''_{do})^2 + (\overline{U}_{qo} - \overline{U}''_{qo})^2}}{X''_{2h}}, \quad (101)$$

Vektor  $I''_{2ho} = \overline{AB}$  jest odchylony o kąt  $-\epsilon$  (tj. wstecz) w stosunku do ladowej osi wartości biernych.

Kąt  $\epsilon$  można obliczyć z zależności

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{-\Delta U''_{qo}}{\Delta U''_{do}} = \frac{\overline{U}''_{qo} - \overline{U}_{qo}}{\overline{U}_{do} - \overline{U}''_{do}} = \frac{X''_q (I''_{qo} - I_{qo})}{X''_d (I''_{do} - I_{do})}. \quad (102)$$

Największa składowa bezokresowa występuje w przypadku, gdy zmiana oporności zewnętrznej zajdzie przy fazie SEM-nej  $E''_{dc}$  równej  $\epsilon = \frac{\pi}{2} - \epsilon$ , wówczas bowiem wektor zmiany napięcia  $\Delta U''_o$  jest prostopadły do osi czasu, a składowa bezokresowa  $I''_{ao}$  leży w osi czasu. Na rys. 20 przedstawiono właśnie takie położenie osi czasu. Wówczas całkowity prąd po naglej zmianie obciążenia wyniesie

$$i_{z(t)} = [(I''_{do} - I'_{do}) e^{-\frac{t}{T''_d}} + (I'_{do} - I_{du}) \cdot e^{-\frac{t}{T_d''}} + I_{du}] \cos(\omega t + \varepsilon) + \\ + [(I''_{qo} - I_{qu}) e^{-\frac{t}{T''_q}}] \sin(\omega t + \varepsilon) - \\ - [I''_{ao} + I''_{2h} \cos(2\omega t + 2\varepsilon)] e^{-\frac{t}{T_a''}}, \quad (103)$$

gdzie: <sup>2</sup>

$I''_{do}$  — składowa podłużna pierwszej harmonicznej prądu przejściowego wstępniego ze wzoru (88),

$I''_{qo}$  — składowa poprzeczna pierwszej harmonicznej prądu przejściowego wstępniego ze wzoru (89),

$I'_{do}$  — składowa podłużna pierwszej harmonicznej prądu przejściowego ze wzoru:

$$I'_{do} = \frac{(X_q + X''_z) E'_{do}}{(X_d' + X''_z) (X_q + X''_z) + (R''_z)^2}, \quad (104)$$

$I_{du}$  — składowa podłużna prądu ustalonego w stojanie przy tym samym wzbudzeniu  $E_{do}$ , jakie istniało przed zmianą parametrów obciążenia, tj.

$$I_{du} = \frac{(X_q + X''_z) E_{do}}{(X_d + X''_z) (X_q + X''_z) + (R''_z)^2}, \quad (105)$$

$I_{qu}$  — składowa poprzeczna prądu ustalonego w stojanie ze wzoru

$$I_{qu} = \frac{R''_z E_{do}}{(X_d + X''_z) (X_q + X''_z) + (R''_z)^2}, \quad (106)$$

$I''_{ao}$  — składowa bezokresowa prądu przejściowego wstępniego ze wzoru (100),

$I''_{2ho}$  — składowa drugiej harmonicznej prądu przejściowego wstępniego ze wzoru (101),

$T''_d$  — stała czasowa przejściowa wstępna w osi podłużnej ze wzoru

$$T''_d = T_{fo} \frac{(X''_d + X''_z) (X''_q + X''_z) + (R''_z + R)^2}{(X'_d + X''_z) (X'_q + X''_z) + (R''_z + R)^2}, \quad (107)$$

$T'_d$  — stała czasowa przejściowa w osi podłużnej ze wzoru

$$T'_d = T_{fo} \frac{(X'_d + X''_z) (X'_q + X''_z) + (R''_z + R)^2}{(X_d + X''_z) (X_q + X''_z) + (R''_z + R)^2}, \quad (108)$$

$T_{fo}$  — stała czasowa jałowa obwodu wzbudzenia,

$T''_a$  — stała czasowa bezokresowa ze wzoru (99).

<sup>2</sup> Symbole prądów oznaczają amplitudy poszczególnych prądów.

Równanie (103) jest najogólniejszym równaniem generatora synchronicznego dla określenia prądu w stojanie przy naglej zmianie parametrów obciążenia, jakie obowiązuje przy założeniu niezmiennych warunków parametrów wzbudzenia i przy niezmiennych obrotach maszyny.

Oprócz wyznaczenia prądu w stojanie można łatwo wyznaczyć prąd w wirniku, gdyż SEM-na  $E$  odpowiada prądowi wzbudzenia, przy czym  $E$  oznacza SEM-ną w osi podłużnej indukowaną w stojanie przez całkowity prąd wzbudzenia.

Określając przez  $E_{do}$  — SEM-ną wzbudzającą przed zmianą parametrów, a przez  $E''_{do}$  — SEM-ną przejściową wstępna otrzymamy równania:

$$E_{do} = U_{do} + aI_{do}, \quad (109)$$

$$E''_{do} = U_{do} + X_d''I_{do}, \quad (110)$$

stąd

$$E_{do} = \frac{X_d}{X_d''} E''_{do} - \frac{X_d - X_d''}{X_d''} U_{do}. \quad (111)$$

Przy naglej zmianie parametrów SEM-ną wzbudzającą  $E_o''$  otrzymamy ze wzoru

$$E_o'' = \frac{X_d}{X_d''} E''_{do} - \frac{X_d - X_d''}{X_d''} U''_{do}. \quad (112)$$

Przyrost prądu wzbudzającego (w skali SEM-nej) wyniesie zatem

$$\Delta E'' = E_o'' - E_{do} = \frac{X_d - X_d''}{X_d''} (U_{do} - U''_{do}). \quad (113)$$

Po wygaśnięciu stanu przejściowego wstępnego wystąpi stan przejściowy ze zmianą wzbudzenia

$$\Delta E' = E_o' - E_{do} = \frac{X_d - X_d'}{X_d'} (U_{do} - U'_{do}). \quad (114)$$

Całkowity uogólniony prąd wzbudzenia  $E_{dt}$  w zależności od czasu zmieni się zatem w myśl równania

$$E_{dt} = (E_o'' - E_o') e^{-\frac{t}{T_d''}} + (E_o' - E_{do}) e^{-\frac{t}{T_d'}} + E_{do} - (E_o'' - E_o') \cdot \cos \omega t \cdot e^{-\frac{t}{T_d''}} \quad (115)$$

lub też

$$E_{dt} = (E_o'' - E_o') e^{-\frac{t}{T_d''}} + (E_o' - E_{do}) e^{-\frac{t}{T_d'}} + E_{do} - \frac{X_d - X_d''}{X_d''} (U_{do} - U''_{do}) \cos \omega t \cdot e^{-\frac{t}{T_d''}}. \quad (116)$$

Równanie (116) jest najogólniejszym równaniem dla przebiegu prądu wzbudzającego. Często pomija się pierwszy składnik tego równania, zadowalając się drugim i trzecim członem.

### 7. PRZYKŁAD

Dla ilustracji podanych rozważań przeliczono przykład.

Dany jest generator synchroniczny jawnobiegunowy o następujących parametrach:  $X_d = 0,8$ ,  $X'_d = 0,3$ ,  $X_q = X'_q = 0,5$ ,  $X''_d = 0,1$ ,  $X''_q = 0,2$ . Generator obciążony jest wstępnie opornością  $\hat{Z}_o = R_o + jX_o = 0,8 + j 0,6$  przy znamionowym napięciu  $U_o = 1$  i przy znamionowym prądzie  $I_o = 1$ . Wszystkie wartości podane są w jednostkach względnych odniesionych do wartości znamionowych maszyny. Obliczyć i wykreślić SEM-ne, napięcia i prądy dla chwili  $t = 0_+$  przy nagłej zmianie oporności obciążenia z wartości  $\hat{Z}_o$  na wartość  $\hat{Z}' = R'_z + jX'_z = 0,4 + j 0,3$ .

#### Rozwiązanie

1. Obliczenie wartości dla obciążenia opornością  $\hat{Z}_o = R_o + jX_o = 0,8 + j 0,6$  na podstawie wzoru (12)

$$\operatorname{tg} \delta_o = \frac{X_q I_o \cos \varphi}{1 + X_q I_o \sin \varphi} = \frac{0,5 \cdot 1 \cdot 0,8}{1 + 0,5 \cdot 1 \cdot 0,6} = 0,308.$$

Następnie obliczamy składowe napięcia:

$$U_{do} = U_o \cos \delta_o = 0,956,$$

$$U_{qo} = U_o \sin \delta_o = 0,294.$$

Z kolei obliczamy składowe prądu:

$$I_{do} = I_o \sin (\varphi_o + \delta_o) = I_o \sin \varphi_o \cos \delta_o + I_o \cos \varphi_o \sin \delta_o = 0,808,$$

$$I_{qo} = I_o \cos (\varphi_o + \delta_o) = I_o \cos \varphi_o \cos \delta_o - I_o \sin \varphi_o \sin \delta_o = 0,589.$$

Ze wzoru (109) otrzymamy SEM-ną synchroniczną

$$E_{do} = U_{do} + X_d I_{do} = 1,602.$$

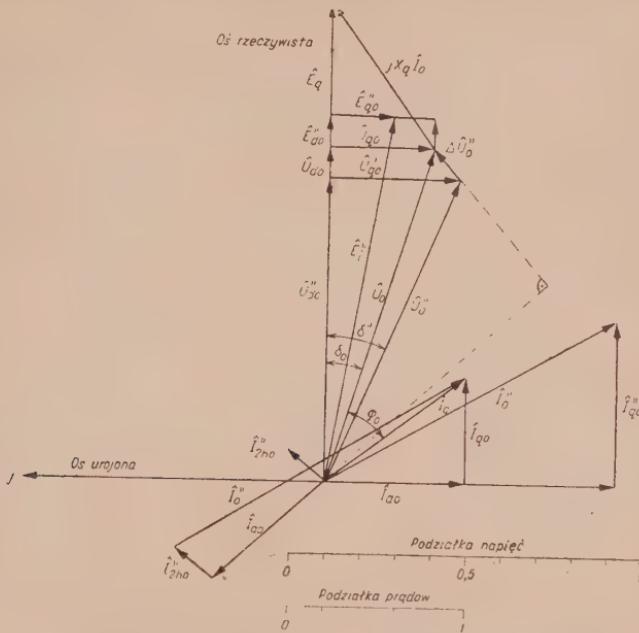
Ze wzoru (110) otrzymamy SEM-ną przejściową wstępna

$$E''_{do} = U_{do} + X''_d I_{do} = 1,037.$$

Ze wzoru (62) otrzymamy

$$E'_{qo} = U_{qo} - X''_q I_{qo} = 0,176.$$

Na podstawie obliczonych wartości sporządzamy rysunek 21. Kierunek osi  $E''_{do}$  najłatwiej można wyznaczyć graficznie, dodając geometrycz-



Rys. 21. Przykład obliczenia składowych przejściowych wstępnych przy nagle zmianie obciążenia generatora jawnobiegunowego z uzwojeniem tłumiącym.

nie do wektora napięcia  $\hat{U}_o$  stratę napięcia  $jX_q \hat{I}_o$  prostopadle do kierunku wektora  $\hat{I}_o$ . W ten sposób otrzymamy SEM-ną  $\hat{E}_q$ , kąt pomiędzy wektorem tej SEM-nej a wektorem napięcia  $\hat{U}_o$  wynosi wówczas  $\delta_o$ . Ze wzorów (78) i (79) wyznaczamy następnie wartości  $\hat{I}_{do}''$  oraz  $I_{qo}''$ .

$$I_{do}'' = \frac{(X_q'' + X_z'') E_{do}'' + R_z'' \cdot E_{qo}''}{(X_d'' + X_z'') (X_q'' + X_z'') + (R_z'')^2} = 1,637,$$

$$I_{qo}'' = \frac{R_z'' \cdot E_{do}'' - (X_d'' + X_z'') E_{qo}''}{(X_d'' + X_z'') (X_q'' + X_z'') + (R_z'')^2} = 0,958.$$

Z kolei ze wzorów (80) i (81) obliczamy składowe napięcia  $U_{do}''$  oraz  $U_{qo}''$ :

$$U_{do}'' = X_z'' I_{do}'' + R_z'' I_{qo}'' = 0,874,$$

$$U_{qo}'' = R_z'' \cdot I_{do}'' - X_z'' I_{qo}'' = 0,367,$$

$$U_o'' = \sqrt{(U_{do}'')^2 + (U_{qo}'')^2} = 0,948.$$

SEM-ną  $E''_o$  obliczamy z równania (112) lub też z równania:

$$E''_o = U''_{do} + X_d \cdot I''_{do} = 2,18.$$

Przyrost składowej bezokresowej prądu wzbudzenia, a tym samym składowa okresowa prądu wzbudzenia wynosi

$$E''_o - E_{do} = 0,578.$$

W celu wyznaczenia składowej bezokresowej oraz drugiej harmonicznej prądu w stojanie ze wzoru (94) obliczamy najpierw

$$X''_2 = \frac{2X_d''X_q''}{X_d'' + X_q''} = 0,133,$$

a następnie ze wzoru (93)

$$X''_{2h} = \frac{2X_d''X_q''}{X_q'' - X_d''} = 0,4.$$

Ze wzoru (96) wynika

$$\hat{I}_{ao}'' = + \frac{U_{qo} - U''_{qo}}{X''_2} + j \frac{U_{do} - U''_{do}}{X''_2} = -0,55 + j 0,617.$$

Ze wzoru (98) otrzymamy

$$\hat{I}_{2ho}'' = - \frac{U_{qo} - U''_{qo}}{X''_{2h}} + j \frac{U_{do} - U''_{do}}{X''_{2h}} = 0,183 + j 0,205.$$

Amplitudy składowych  $I''_{ao}$  i  $I''_{2ho}$  otrzymamy z równań:

$$I''_{ao} = (0,55^2 + 0,617^2)^{\frac{1}{2}} = 0,827,$$

$$I''_{2ho} = (0,183^2 + 0,205^2)^{\frac{1}{2}} = 0,275.$$

Wektor  $\hat{I}_{ao}''$  z rys. 21 jest prostopadły — zgodnie z teorią — do straty napięcia  $\Delta \hat{U}_o''$ , tj. do różnicy geometrycznej napięć  $\hat{U}_o$  oraz  $\hat{U}_o''$ . Oznaczając dodatkowo

$$\hat{I}_o'' = \hat{I}_{do}'' + \hat{I}_{qo}'' ,$$

otrzymamy zależność

$$\hat{I}_o = \hat{I}_{do} + \hat{I}_{qo} = \hat{I}_{ao}'' - \hat{I}_{2ho}'' + \hat{I}_o''.$$

Konstrukcję tę przedstawiono graficznie na rys. 21.

W celu ustalenia wykresu wektorowego maszyny dla stanu przejściowego należy obliczyć dodatkowo SEM-ną przejściową  $E'_{do}$  ze wzoru (44)

$$E'_{do} = U_{do} + X_d' I_{do} = 1,198.$$

Z równania (104) otrzymamy prąd  $I'_{do}$

$$I'_{do} = \frac{(X_q + X_z'') E'_{do}}{(X_d' + X_z'') (X_q + X_z'') + (R_z'')^2} = 1,5.$$

Podobnie obliczamy  $I'_{ao}$

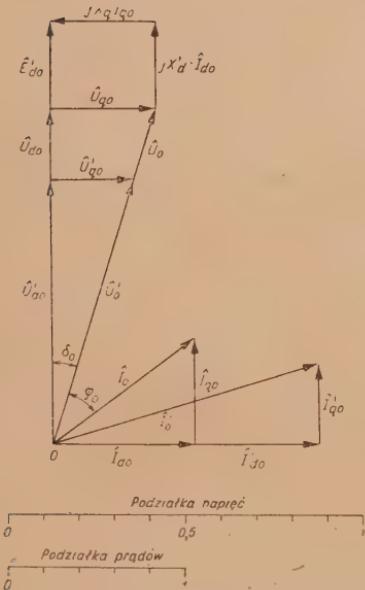
$$I'_{qo} = \frac{R_z \cdot E'_{do}}{(X'_d + X''_z)(X'_a + X''_z) + (R''_z)^2} = 0,46$$

Wreszcie otrzymamy

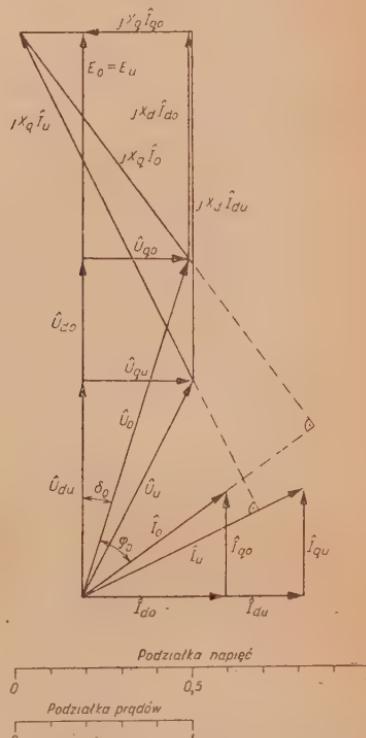
$$U'_{dq} = E'_{dq} - X'_d \cdot I'_{dq} = 0,748,$$

$$U'_{ga} = X_g \cdot I'_{ga} = 0,23,$$

$$U'_c = \left[ (U'_{do})^2 + (U'_{go})^2 \right]^{1/2} = 0,783.$$



Rys. 22. Przykład obliczenia składowych przejściowych po naglej zmianie obciążenia generatora jawnobiegunowego z uzwojeniem tłumiącym.



Rys. 23. Rysunek do przykładu liczbowego.

Wykres dla stanu przejściowego przedstawiono na rysunku 22. Na koniec obliczamy wartości dla stanu ustalonego. Ze wzoru (105) otrzymamy

$$I_{du} = \frac{(X_q + X_z'') E_{do}}{(X_d + X_z'') (X_q + X_z'') + (R_z'')^2} = 1,235.$$

Ze wzoru (106)

$$I_{qu} = \frac{(R''_z)E_{do}}{(X_d + X''_z)(X_q + X''_z) + (R''_z)^2} = 0,617.$$

Składowe napięcia otrzymamy z równań:

$$U_{du} = E_{do} - X_d I_{du} = 0,614,$$

$$U_{qu} = X_q \cdot I_{qu} = 0,3085,$$

$$U_u = [(U_{du})^2 + (U_{qu})^2]^{1/2} = 0,688.$$

Obliczone wartości napięć i prądów przedstawiono na rys. 23.

Katedra Maszyn Elektrycznych  
Politechniki Wrocławskiej

#### WYKAZ LITERATURY

1. Adkins B.: Transient theory of synchronous generators connected to power systems — J. I. E. E., Vol. 98, part II, 1951, s. 510.
2. Bödefeld T., Sequenz H.: Elektrische Maschinen — J. Springer, 1944.
3. Clarke E.: Static and Transient Stability — Circuit Analysis of A-C power systems — Vol. I, J. Wiley and Sons, 1950.
4. Doherty R. E., Nickle C. A.: Synchronous machines, I and II: An extension of Blondel's two reaction theory, steady state power angle characteristics — T. A. I. E. E., Vol. 45, 1926, s. 912.
5. Doherty R. E., Nickle C. A.: Synchronous machines, III: Torque angle characteristics under transient conditions — T. A. I. E. E., Vol. 46, 1927, s. 1.
6. Doherty R. E., Nickle C. A.: Synchronous machines, IV — T. A. I. E. E., Vol. 47, 1928, s. 457.
7. Doherty R. E., Nickle C. A.: Synchronous machines, V. Three-Phase short circuit — T. A. I. E. E., Vol. 49, 1930, s. 700.
8. Goriew A. A.: Pierechodnyje processy synchronnoj maszyny — GEJ, 1955.
9. Jezierski E.: Maszyny synchroniczne — PWT, 1951, s. 168.
10. Kostienko M. P.: Elektriczeskie maszyny, specjalnaja czast' — GEJ, 1954.
11. Nowacki P. J.: Obliczanie linii dalekosiężnych — PWT, 1953.
12. Nowacki P. J.: Składowe symetryczne — PWN, 1954.
13. Park R. H.: Definition of an ideal synchronous machine and formula for the armature flux linkages — General Electric Rev., VI 1928, s. 332.
14. Park R. H.: Two reaction theory of synchronous machines, I — T. A. I. E. E., Vol. 48, 1929, s. 716.
15. Park R. H.: Two reaction theory of synchronous machines, II — T. A. I. E. E., Vol. 52, 1933, s. 352.
16. Piotrowski L. M.: Elektriczeskie maszyny — GEJ, 1945.
17. Syromiatnikow I. A.: Rezimy raboty synchronnych generatorow — GEJ, 1952.
18. Ulianow S. A.: Korotkie zamykania w elektriczeskich sistiemach — GEJ, 1952.

П. НОВАЦКИ

ПОДСЧЁТ СОСТАВЛЯЮЩИХ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТОКА СИНХРОННОГО  
ЯВНОПОЛЮСНОГО ГЕНЕРАТОРА ПРИ ВНЕЗАПНОМ ИЗМЕНЕНИИ  
СОПРОТИВЛЕНИЯ НАГРУЗКИ, С УЧЁТОМ НАГРУЗКИ ПРЕДШЕСТВУЮЩЕЙ  
КОРОТКОМУ ЗАМЫКАНИЮ

## Резюме

В настоящем труде приведен новый способ аналитического и графического подсчёта составляющих обобщённого тока в статоре и тока возбуждения в синхронном явнополюсном генераторе, который появляется при внезапном изменении сопротивления нагрузки на зажимах машины. В особенности весьма простым способом можно определить составляющие: переходную вступительную и переходную в продольной и в поперечной оси для первой гармонической тока, равным образом, вторую гармоническую и апериодическую составляющую.

В первой главе приведена векторная диаграмма явнополюсного генератора для нормальной нагрузки, причём обобщённый в статоре ток может быть представлен с помощью уравнения (7) или без учёта активного сопротивления статорной обмотки — с помощью уравнения (8) или (9). В труде введены беззатратные сопротивления  $X_{2h}$  (формула 10) и  $X_2$  (формула 11), как беззатратные индукционные сопротивления для второй гармонической и для апериодической составляющей в стационарном состоянии. Графическая интерпретация уравнения (9) представлена на рис. 2. Геометрическим местом тока в статоре, при весьма медленных изменениях нагрузки и при постоянном возбуждении  $E_{d0} = \text{const}$ , является известный по теории синхронной машины — червяк Паскаля.

В главе второй рассмотрены основные условия короткого замыкания цепей с индуктивными сопротивлениями. Из закона постоянства магнитных сопряжений истекают условия для токов определённых уравнениями (13) или (14). В результате дискуссии оказывается, что эти условия действительны также в символическом виде (ср. уравнения (24) и (25)). Так как ток  $\hat{I}_0$  в состоянии нормальной нагрузки подан, а вновь установившейся  $\hat{I}_{so}$  (уравнение (26)) легко определим, поэтому апериодическая составляющая  $\hat{I}_{apo}$  может быть тотчас же подсчитана из условия выраженного уравнением (25). Рисунок 7 представляет векторную диаграмму цепи из рисунка 4 для состояния предшествующего короткому замыканию (выключатель  $S$  на рисунке 4 открыт), а также для момента  $t=0$  после появления короткого замыкания. На основании рисунка 7 возможно определить геометрическое место тока короткого замыкания  $\hat{I}_{(1)}$  на рисунке 8. Это место представляет круг с центром  $M$  (рис. 8) с абсциссой равной апериодической составляющей  $\hat{I}_{apo+}$  для момента  $t=0$  и при радиусе равным периодической составляющей  $\hat{I}_{apo+}$  тока короткого замыкания. Эта задача может быть представлена с помощью рисунка 9, в котором останавливаем вектор напряжения  $\hat{U}_{(1)}$ , которое появлялось в пункте короткого замыкания  $t=0$  на момент перед замыканием, а электродвижущая сила  $\hat{E}_{(1)}$  поворачивает на угол  $\omega t$  после наступления короткого замыкания. Разница векторов  $\hat{E}_{(1)}$  и  $\hat{U}_{(1)}$  даёт вектор  $\hat{Z}_w \hat{I}_{(1)}$ , где  $Z_w$  представляет внутреннее сопротивление источника тока.

В главе четвёртой приведены принципы подсчёта составляющих тока при внезапном изменении сопротивления нагрузки. Этот случай чаще случая короткого замыкания непосредственно на зажимах источника тока. На основании анализа оказалось, что апериодическую и периодическую составляющую легко определить из уравнения (43), причём апериодическая составляющая  $\hat{I}_{apo}$  следует из уравнения (42) и равна изменению напряжения  $\Delta \hat{U}$ , делённому на сопротивление источника. При

чисто индуктивном внутреннем сопротивлении источника апериодическая составляющая  $\hat{I}_{ao}$  перпендикулярна к вектору, изображающему изменение напряжения  $\Delta\hat{U}$ . Рисунки 10 и 11 иллюстрируют этот вопрос.

Основываясь на выводах третьей главы представляем способ подсчёта составляющих переходной второй гармонической и апериодической составляющей ток короткого замыкания синхронного явнополюсного генератора при коротком замыкании на зажимах генератора. Сначала принят во внимание генератор без обмотки затухания. Пользуясь методом определения вектора напряжения на зажимах в моменте  $t=0-$  и вращая вектор переходной электродвижущей силы  $\hat{E}'_{do}$  (рис. 14) непосредственно определяются составляющие: продольная  $\hat{I}'_d$  и поперечная  $\hat{I}'_q$  тока короткого замыкания (уравнения (52) и (53)). Полный ток короткого замыкания изображается тогда в виде уравнения (59) согласно уравнения Парка-Гориева [8], [13], [14], [15].

Аналогично формулам (10) и (11) выведено понятие переходных сопротивлений для второй гармонической  $X'_{2h}$  (уравнение (57)) и для переходного реактанса обратной последовательности  $X'_2$  (уравнение (58)).

Графическая интерпретация тока короткого замыкания согласно уравнению (59) указана на рисунках 15 и 16, а его геометрическим местом является опять червяк Паскаля. В этом случае следует на основании уравнений (59) и (60) подсчитать апериодическую составляющую  $\hat{I}'_{ao}$  и составляющую второй гармонической  $\hat{I}'_{2ha}$  а также периодическую составляющую  $\hat{I}'_o$  для момента  $t=0+$  после короткого замыкания. Сумма этих трёх составляющих дает ток нагрузки  $\hat{I}_o$ , существующий в моменте  $t=0-$  перед коротким замыканием. Цифровой пример приведенный на рисунке 16 и 17 иллюстрирует выведенные уравнения.

В главе шестой применён метод установленного вектора напряжения для определения величины тока, появляющегося в синхронном явнополюсном генераторе при внезапных изменениях нагрузки. Этот случай чаще всего встречается, но автор не встретил до сих пор подробного анализа этой проблемы. Рассуждения проведены для явнополюсного генератора снабженного обмоткой затухания в продольной и в поперечной оси. В общем случае величина напряжения  $\hat{U}_o$  переходит тогда внезапно на новую величину  $\hat{U}''$  (см. рисунок 19). Вводя вступительную переходную электродвижущую силу в продольной оси  $E'_{do}$  и вступительную переходную э. д. с. в поперечной оси  $E''_{qo}$  получаем формулы (70) и (71) для продольной составляющей  $\hat{I}'_{do}$  и для поперечной  $\hat{I}'_{qo}$  тока нагрузки при нормальной нагрузке зажимов машины сопротивлением  $R_o + jX_o$ . Составляющие этой гармонической  $\hat{I}'_{do}$  и  $\hat{I}''_{qo}$  после внезапной перемены параметров нагрузки  $R_o + jX_o$  на  $R''_o + jX''_o$  приведены в уравнениях (77) и (78). Дальнейший анализ показывает, что составляющую второй гармонической  $\hat{I}'_{2ha}$  и апериодическую составляющую  $\hat{I}'_{ao}$  получаем простым способом на основании уравнений (98) и (96), в которых появляется геометрическая переменная напряжения  $\hat{U}_o$ :  $\hat{U}'' = \Delta\hat{U}''$  вместо  $\hat{U}_o$  в случае короткого замыкания на зажимах (т. к. тогда  $\hat{U}'' = 0$ ). Составляющая второй гармонической равна таким образом частному изменения напряжения на сопротивление  $X''_{2h}$ .

Геометрическая интерпретация выведенных формул указана на рисунке 20, при чём — при чисто индуктивном сопротивлении  $X''_{2h}$  вектор  $\hat{I}''_{ao}$  перпендикулярен к вектору  $\hat{U}_o$ :  $\hat{U}'' = \Delta\hat{U}''$  и направлен на электрических  $90^\circ$  вперёд по отношению к нему, а вектор  $\hat{I}''_{2ha}$  перпендикулярен к зеркальному отражению вектора  $\Delta\hat{U}''$  относительно оси  $\hat{E}''_{do}$  (см. рисунок 20).

Затем приведены полные уравнения для хода полного тока в статоре при внезапном изменении нагрузки на зажимах (уравнение 103), принимая во внимание

все временные постоянные. В конце приведено также уравнение тока возбуждения (уравнение 116).

Цифровой пример а также рисунки 21, 22 и 23 иллюстрируют выведенные формулы.

Хотя ряд авторов, например Адкинс ([1] параграф 5.2 труда этого автора) упоминает о задаче подсчёта токов, появляющихся при внезапных изменениях напряжения, однако подробные формулы не поданы. Уравнения выведенные в шестой главе должны выполнить этот пробел и облегчить проблему подсчёта всех составляющих, какие появляются в любом нестационарном процессе синхронного явнополюсного генератора, тем более, что эти составляющие следует учесть при применяемых ныне выключателях мощности с весьма коротким временем выключения.

P. J. NOWACKI

### THE CALCULATION OF THE TRANSIENT CURRENT IN SYNCHRONOUS GENERATORS AT SUDDEN LOAD CHANGES

#### Summary

The paper deals with a new analytical and graphical method of deriving the transient components of the armature - and field - current of synchronous generators at sudden load changes. Especially formulae are derived for the subtransient and transient components of the first harmonic as well as for the second harmonic and the aperiodic components.

The first chapter gives the steady state two-axis vector diagram of a synchronous generator at normal load conditions, the generalized armature current being given by equation (7), or, neglecting the armature resistance — by equations (8) or (9).

The paper introduces the steady state second harmonic reactance  $X_{2h}$  (equation 10) and the steady state negative sequence reactance  $X_2$  (equation 11). The equation (9) is graphically presented in Fig. 2, the locus of the armature current being the well known Pascal's snail in case of constant excitation and at slowly varying loads.

The second chapter deals with the basic conditions occurring at sudden changes of parameters in electric circuits containing reactances. The flux — linkage theorem furnishes the definition of initial current conditions as given by equation (13) and (14). The discussion shows, that the initial conditions can also be expressed in complex form (equations (24) and (25)).

As the pre-fault load current  $\hat{I}_o$  is given, and it is easy to define the new sustained symmetrical load current  $\hat{I}_{so+}$  (equation (26)), the aperiodic component  $\hat{I}_{aper+}$  may immediately be obtained from equation (25). Fig. 7 presents the vector diagram of the circuit described in Fig. 4 for the pre-fault state (switch „S“ in Fig. 4 open) and for the moment  $t=0+$  immediately after closing switch „S“. With the aid of Fig. 7 it is easy to define the locus of the total transient current  $\hat{I}_s(t)$ , given in Fig. 8. This locus is a circle with the centre at  $M$ , whose abscissa is given by the aperiodic component  $\hat{I}_{apo+}$  at  $t=0$ , and whose radius is equal to the symmetrical component  $\hat{I}_{so+}$ .

Another way of defining the transient current is presented in Fig. 9, in which the vector of the armature voltage  $\hat{U}_{so-}$ , which had existed at the moment  $t=0-$  im-

immediately before the load change occurred — remains fixed, whereas, the e. m. f.  $\hat{E}(t)$  rotates at the time  $t$  by an angle  $\omega t$  from the position, which it occupied at  $t=0$ .

The voltage difference of the vectors  $\hat{E}$  and  $\hat{U}_0$  — results in the vector  $\hat{Z}_w \hat{I}(t)$ , where  $\hat{Z}_w$  represents the internal impedance of the source.

Chapter 4 deals with the principles of calculating the transient current in the case of sudden load switching. This case is of far more practical importance than a short circuit at the generator terminals. It has been shown, that the aperiodic and symmetrical components are easily determined from equation (42) as the ratio of the voltage change  $\Delta \hat{U}$  and the internal source impedance. If the internal resistance is neglected and a pure reactance assumed, the aperiodic component  $\hat{I}_{ao}$  is then perpendicular to the vector representing the voltage change  $\Delta \hat{U}$ . Fig. 10 and Fig. 11 illustrate the case.

In accordance with the results obtained in chapter 3 the case of a sudden three-phase terminal short circuit of a synchronous generator has been calculated, especially the symmetric first harmonic and second harmonic as well as the aperiodic component.

First, a generator without a damper winding has been considered. By fixing the terminal voltage at  $t=0$  —, and by rotating the direct-axis transient e. m. f.  $\hat{E}'_{do}$  (Fig. 14) the direct-axis component  $\hat{I}_d$  and the quadrature-axis component  $\hat{I}_q$  of the total short-circuit current are immediately obtained (equation (52) and (53)). The total short-circuit current is evaluated from equation (59), in accordance with the equations of Park and Goriew ([8], [13], [14], [15]).

In a similar way as in formulae (10) and (11) one can evaluate the definitions of the transient second harmonic reactance  $X'_{2h}$  (equation 57) and the transient negative sequence reactance  $X'_2$  (eq. 58).

The short-circuit current in accordance with equation (59) is graphically presented in Fig. 15 and 16, and its locus is again a Pascal's snail. In the transient case one has to calculate the aperiodic component  $\hat{I}'_{ao}$  from equation (59) and the second harmonic component  $\hat{I}'_{2h}$  from equation (60), as well as the first harmonic component  $\hat{I}'_1$  for  $t=0$ , i. e. immediately after the short circuit occurred. The geometric sum of all three components results in the pre-fault current  $\hat{I}_0$  at  $t=0$  — i. e. immediately before the short circuit occurred. A numerical example shown in Fig. 16 and 17 illustrates the derived equations.

In chapter 6 the fixed - voltage method has been used for deriving the current equations in the case of a sudden load change of a synchronous generator with damper windings. Though this case is by far the most frequent one, no detailed analysis of the problem, to the author's knowledge, has, so far, been carried out.

In the general case the terminal voltage undergoes a sudden change from  $\hat{U}_0$  to  $\hat{U}''$  (see Fig. 19). Introducing the subtransient direct-axis e. m. f.  $\hat{E}''_{do}$  and the subtransient quadrature-axis e. m. f.  $\hat{E}''_{qo}$  the direct - and quadrature - axis components  $\hat{I}_d$  and  $\hat{I}_q$  at normal load result from eqs. (70) and (71), the pre-fault load being  $R_0 + jX_0$ . The first harmonic components  $\hat{I}''_{do}$  and  $\hat{I}''_{qo}$  after a sudden load change from  $(R_0 + jX_0)$  to  $(R''_0 + jX''_0)$  are evaluated in equations (77) and (78).

A further analysis shows, that the second harmonic component  $\hat{I}''_{2h}$  and the aperiodic component  $\hat{I}'_{ao}$  for the subtransient state are easily calculated from equations (98) and (96), in which the geometric voltage change  $\Delta \hat{U}'' = \hat{U}_0 - \hat{U}''$  takes the place

the voltage  $\hat{U}_o$  in the case of a terminal short-circuit (the voltage  $\hat{U}''$  being then zero).

The second harmonic component is equal to the ratio of the voltage change  $\Delta\hat{U}''$  and of the subtransient second harmonic reactance  $\hat{X}_{2h}''$ .

Fig. 20 represents a geometric interpretation of the derived formulae. If the negative - sequence impedance is a pure reactance ( $X_2''$ ) the vector  $\hat{I}_{ao}''$  of the aperiodic component is perpendicular to the vector of the voltage-change  $\hat{U}_o - \hat{U}'' = \Delta\hat{U}''$  and leads this voltage by  $\frac{\pi}{2}$ , whereas the vector of the second harmonic component  $\hat{I}_{2h}''$  is perpendicular to the image of the vector  $\Delta\hat{U}''$ , both the image and the vector being symmetrically situated to the axis of the subtransient direct-axis e. m. f.  $\hat{U}_{do}''$  (Fig. 20).

Finally the complete solution for the total switching current in case of a sudden load change has been given by equation (103), which takes into consideration all current components. Equation (116) evaluates also the field-current.

A numerical example and Figs. 21, 22 and 23 illustrate the derived formulae.

Although some authors (e. g. Adkins [1] especially p. 5. 2 of the paper) mention the case of a sudden change of voltage, they do not give precise formulae.

The formulae derived in chapter 6 are to fill the gap and to facilitate the calculation of all current components, which occur at a sudden load change. The importance of evaluating all the components of a switching current is growing due to the fact of using ever increasing numbers of switch-gear with short switching times in power systems.

## ERRATA

Zeszyt 3 — Tom III — 1954

Lp.	str.	wiersz		jest	powinno być
		od dołu	od góry		
1	312	16	—	względniej	względnej
2	320	wzór (20)		$\frac{R_{oz}}{\sqrt{R_{min} \cdot R_{max}}} \leq 1$	$\frac{R_{oz}}{\sqrt{R_{min} \cdot R_{max}}} \leq 1$
3	323	—	4	$\frac{R_{oz}}{\sqrt{R_g + R_0}}$	$\frac{R_{oz}}{\sqrt{R_g + R_{oz}}}$
4	327	5	—	sensitiviy	sensitivity
5	352	5	—	przyłożenia	przyłożeniu
6	359	—	3	переходных	переходных
7	360	7	—	transformes	transformers
8	360	21	—	Stankvist's	Stenkqvist's
9	376	wzór (107)		$\frac{1}{f_z \cdot D}$	$\frac{1}{f_z \cdot D}$
10	381	11	—	$10^{-8}$	$10^{-8}$
11	414	2	—	ilustrate	illustrate
12	444	wzór (7)		$0 < \gamma_1 < \beta_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n$	$0 < \gamma_1 < \beta_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n$

## WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z interlinią (co drugi wiersz), z marginesem 3 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwóch egzemplarzach.
2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg pisać należy szczególnie dokładnie i wyraźnie.
3. Każda praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim do 25 wierszy maszynopisu oraz obszerniejsze streszczenia (do 20% objętości artykułu) w języku rosyjskim oraz angielskim francuskim lub niemieckim. W razie niemożności nadesłania streszczenia w języku obcym autor dostarcza odpowiednie streszczenie w języku polskim w trzech egz. z jednocośnym wpisaniem, o ile možności, terminologii w języku rosyjskim oraz w języku obcym.
4. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.
5. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie używać określeń jak figura, szkic, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach — na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy i nazwisko autora.
6. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych) podobnie jak rysunki należy wykonywać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis) objaśniający.
7. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom, numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje powinny być ponumerowane w kolejności alfabetycznej autorów; w tekście — powołania na numer pozycji w nawiasie kwadratowym, np. [3].
8. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egzemplarzy odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze autor może zamówić w redakcji na własny koszt przy przesyłaniu korekty swej pracy.

**U w a g a:** Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem: Redakcja „Archiwum Elektrotechniki“, Warszawa, Kościelna 75, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki PAN. tel. 8.32.04.

Cena zł 15,—